

11.2 Régularisation

Dans cette partie, nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne usuelle, désignée par « $|\cdot|$ ». [†] Les intégrales s'entendent par rapport à la mesure de Lebesgue.

Rappelons le résultat suivant de calcul différentiel.

11.4 Lemme. Il existe une fonction $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, non identiquement nulle, telle que :

- i) $0 \leq \zeta \leq 1$ si $|x| < 1$.
- ii) $\zeta(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. [‡]

ex $\zeta(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

La fonction ζ est alors intégrable d'intégrale strictement positive (justifier). En divisant ζ par son intégrale, nous obtenons ainsi l'existence d'un *noyau régularisant*. Les noyaux régularisants jouent un rôle fondamental dans l'approximation d'une fonction par des fonctions lisses.

11.5 Définition (Noyau régularisant). Un *noyau régularisant* est une fonction $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que il existe $0 < R < \infty$ tel que

- i) $\rho(x) \geq 0$ si $|x| < R$.
- ii) $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq R$.
- iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$.

ex $\rho(x) = \frac{\zeta(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \zeta(t) dt}$

Si, de plus, $R = 1$, alors ρ est un *noyau régularisant standard*.

Une autre classe de fonctions d'intérêt dans les procédures de régularisation est $C_c^k(\Omega)$.

11.6 Définition. Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$C_c^k(\Omega) := \{\varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}) ; \text{il existe un compact } K \subset \Omega \\ \text{tel que } \varphi(x) = 0, \forall x \in \Omega \setminus K\}.$$

Le résultat suivant montre que la convolution avec des fonctions de $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ « lisse » les fonctions et donne une formule très importante, (11.8).

[†]. Donc $|x| = \|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

[‡]. Voici un exemple *explicite* de telle fonction (dont nous ne vérifierons pas ici les propriétés).

$$\zeta(x) := \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)}, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

11.7 Proposition. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Nous avons :

- a) $f * \varphi$ est défini en tout point. $f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y) dy$
 b) $f * \varphi \in C^k$.
 c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$,

$$\partial^\alpha(f * \varphi) = f * (\partial^\alpha \varphi). \quad (11.8)$$

La notation suivante est dans l'esprit de (11.4).

11.8 Notation. Si $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, nous posons

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho(x/\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad \diamond (11.9)$$

Le résultat suivant est le résultat central de ce chapitre.

11.9 Théorème. Soit ρ un noyau régularisant. Soit $1 \leq p < \infty$. Nous avons

$$f * \rho_\varepsilon \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0, \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n). \quad (11.10)$$

En particulier, $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

De même, $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

11.10 Remarque. Notez l'ambiguïté de la formulation de la dernière partie du théorème. Au sens strict du terme, $C^\infty \cap L^p$ n'a pas de sens, car L^p contient des classes et C^∞ des fonctions. Le sens de l'énoncé est le suivant : pour tout $f \in L^p$, il existe une suite $(f_j)_j$ telle que :

- a) $f_j \in C^\infty \cap \mathcal{L}^p, \forall j$.
 b) Pour tout représentant $g \in \mathcal{L}^p$ de f , $f_j \rightarrow g$ dans $\mathcal{L}^p$.

Une formulation équivalente est que, avec f_j comme ci-dessus, la classe $[f_j] \in L^p$ de f_j vérifie $[f_j] \rightarrow f$ dans L^p . $\diamond$

Une conséquence facile du théorème 11.9 est le résultat suivant.

11.11 Théorème. Soient $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

De même, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

11.12 Remarque. Le théorème 11.11 est à la base de la stratégie la plus utilisée pour montrer des propriétés de toutes les fonctions de l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$:

1. Établir la propriété pour les fonctions $f \in C_c^\infty(\Omega)$.

↳ Lema de 11.7:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) \varphi(y)| dy < \infty$$

Ein effekt: $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) \varphi(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |\varphi(x-y)| dy$

$$\forall y \quad |f(y)| |\varphi(x-y)| \leq |f(y)| \|\varphi\|_{\infty} \chi_{x-K}(y)$$

ou $\forall t \notin K, g(t) = 0$

fonction caractéristique

$$\Rightarrow \|f(y)\varphi(x-y)\|_{L^1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y) \varphi(x-y)| dy \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_{L^p} \|x\|_{x=1/L^q} \quad (\text{Young}) \quad < \infty$$

(or q to $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

Can $x \in K$ compact

Continuité. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Continuité. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$
 [Si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$] Soit $B(x_0, 1) = \{x : \|x - x_0\| < 1\}$

$$\forall x \in B(x_0, 1), \quad f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) \varphi(x-y) dy$$

$\forall y \in \mathbb{R}^n, x \mapsto f(y)\varphi(x-y)$ continue sur $B(x_0, 1)$.

de plus $\forall \|x - x_0\| < 1, \quad |f(y) \varphi(x - y)| \leq \|\varphi\|_\infty |f(y)| \chi_{B(0, R)}(y)$

Seit $r > 0$, $\|z\| > r \Rightarrow \varphi(z) = 0$

↑ indépendant de x .

Donc $\|y\| > \underbrace{\pi + \|x_0\| + 1}_R \Rightarrow \|x - y\| \geq \|y\| - \|x - x_0\| - \|x_0\| > \pi \Rightarrow \varphi(x - y) = 0$

et $\|y\|_\infty \|f\| \chi_{B(0,R)}$ est L^1 : $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \chi_{B(0,R)}(y) dy \leq \|f\|_{L^q} \|\chi_{B(0,R)}\|_{L^q}$

Donc Par le théorème de continuité sous l'intégrale
 $f * \varphi$ continue sur $B(x_0, 1)$.

Théorème. Soit $f \geq 0$, $\forall \|x\| \geq 1, f(x) = 0$
 $f \in C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$.

Soit $(\forall \varepsilon > 0) \quad f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$\forall p \in [1, +\infty[$, $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$,
 $(p \neq \infty)$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \|f_\varepsilon * f - f\|_{L^p} = 0$$

Contre-ex. Si $n=1$, $p=\infty$, $f = \chi_{[0, +\infty[}$

$$\forall h \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \|h - f\|_\infty \geq 1$$

Démo Si $f = \chi_K$ avec K compact $\subset \mathbb{R}^n$

Soit $\varepsilon > 0$, Soit $j \geq 1$, $K_j = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq \frac{1}{j}\}$



K_j compact
 $K_1 \supset K_2 \supset \dots$
 $\bigcap_{j \geq 1} K_j = K$

$$\begin{aligned} \text{Since } x \in K, \quad (X_K - X_K * f_\varepsilon)(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} (X_K(x) - X_K(x-y)) f_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_{\|y\| < \varepsilon} (X_K(x) - X_K(x-y)) f_\varepsilon(y) dy \end{aligned}$$

$$\text{So } \varepsilon < \frac{1}{J}$$

$$X_K(x) = X_{K_J} * f_\varepsilon(x)$$

$$\Rightarrow 1 = \int_{\mathbb{R}^m} X_{K_J}(x-y) f_\varepsilon(y) dy$$

$$\text{So } x \in K, \|y\| < \varepsilon \text{ also } \|x - (x-y)\| < \varepsilon < \frac{1}{J}$$

$$\Rightarrow x-y \in K_J$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= \int_{\mathbb{R}^m} X_{K_J}(x-y) f_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_{\|y\| < \varepsilon} X_{K_J}(x-y) f_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_{\|y\| < \varepsilon} f_\varepsilon(y) dy = 1 \end{aligned}$$

$$\text{So } x \in K, \varepsilon < \frac{1}{J} \Rightarrow X_K(x) = X_{K_J} * f_\varepsilon(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in K, (X_K - X_K * f_\varepsilon)(x) = (X_{K_J} - X_K) * f_\varepsilon(x)$$

$$\text{Si } x \notin K_j, \quad \chi_K(x) = 0 = \chi_{K * f_\varepsilon}(x)$$

$$\text{Si } x \in K_j \setminus K, \quad |\chi_K(x) - \chi_{K * f_\varepsilon}(x)| = |\chi_{K * f_\varepsilon}(x)| \leq 1$$

$$\text{Donc } |\chi_K - \chi_{K * f_\varepsilon}| \leq \chi_{K_j \setminus K} * f_\varepsilon + \chi_{K_j \setminus K}$$

$$\text{Donc } \|\chi_K - \chi_{K * f_\varepsilon}\|_{L^p} \leq \|\chi_{K_j \setminus K}\|_{L^p} \|f_\varepsilon\|_q + \|\chi_{K_j \setminus K}\|_{L^p}$$

$$\leq 2 \|\chi_{K_j \setminus K}\|_{L^p}$$

$$\leq 2 \|\chi_{K_j \setminus K}\|_{L^1} = 2 \nu(K_j \setminus K)$$

(mesure de Lebesgue)

$$\text{On } \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(K_j \setminus K) = 0$$

$$(\nu(\bigcap_j K_j) - \nu(K))$$

$$\text{Soit } \eta > 0, \text{ Soit } j \text{ tq } \nu(K_j \setminus K) < \eta$$

$$\text{Alors } \forall \varepsilon < \frac{1}{j}, \quad \|\chi_K - \chi_{K * f_\varepsilon}\|_{L^p} < 2\eta.$$

2. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ qui ont la propriété étudiée est un *fermé*.

Nous illustrerons cette démarche dans la section 11.3 (preuve des propositions 11.21, 11.24 et du théorème 11.27).

Exercices

Voici quelques propriétés fondamentales de ρ_ε , avec ρ noyau régularisant standard.

11.13 Exercice. Soit ρ un noyau régularisant standard. Montrer, pour tout $\varepsilon > 0$:

a) $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ si $|x| < \varepsilon$.

b) $\rho_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$.

c) $\int \rho_\varepsilon = 1$. ◇

Cet exercice est un complément de la proposition 11.7. Cette fois-ci, c'est f qui est supposée de classe C^k .

11.14 Exercice. Soient $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Nous avons :

a) $f * \varphi$ est défini en tout point.

b) $f * \varphi \in C^k$.

c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$,

$$\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi. \quad (11.11)$$

d) Si f est un polynôme[†] (de n variables) de degré $\leq m$, alors $f * \varphi$ est un polynôme de degré $\leq m$. ◇

L'exercice suivant, dans l'esprit de l'exercice 4.32, sera utilisé dans la preuve du théorème 11.9.

11.15 Exercice. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, soit

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n ; \text{dist}(x, K) \leq 1/j\}.$$

Alors K_j est un compact, $\forall j$, et $K_j \searrow K$. ◇

L'exercice qui suit sera utilisé dans la preuve du théorème 11.11.

11.16 Exercice. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (muni d'une norme). Pour $j \in \mathbb{N}^*$, soit

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| \leq j, \text{dist}(x, U^c) \geq 1/j\}.$$

Alors K_j est un compact, $\forall j$, et $K_j \nearrow U$. ◇

†. Ou plutôt une fonction polynômiale.

L'exercice suivant montre que la procédure d'approximation de la preuve du théorème 11.11 permet d'approximer une fonction dans plusieurs espaces $\mathcal{L}^p$ à la fois.

11.17 Exercice. Soient $1 \leq p_1, \dots, p_k < \infty$. Soit $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\Omega) \cap \dots \cap \mathcal{L}^{p_k}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_j \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \dots, k$. $\diamond$

11.18 Exercice. En prenant $n = 1$ et $f := \chi_{[0, \infty[}$, montrer que les théorèmes 11.9 et 11.11 et le lemme 11.19 sont faux si $p = \infty$. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration de la proposition 11.7. Rappelons le résultat suivant : une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ qui s'annule en dehors d'un compact est bornée.

*Étape 1. Existence de $f * \partial^\alpha \varphi$ si ∂^α est d'ordre $\leq k$.* Soit $R < \infty$ tel que $\varphi(x) = 0$, $\forall |x| \geq R$. Soit ∂^α une dérivée partielle d'ordre $\leq k$. Alors $\partial^\alpha \varphi$ est continue et s'annule en dehors de $\overline{B}(0, R)$ (justifier), donc il existe une constante finie C_α telle que $|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_\alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Soit q le conjugué de p . De ce qui précède, $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{L}^q$ (justifier), et donc $f * \partial^\alpha \varphi$ est défini en tout point (théorème 11.2 c)).

*Étape 2. $f * \varphi$ est continue.* Soit $h(y, x) := f(y) \varphi(x - y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, de sorte que $f * \varphi(x) = \int h(y, x) dy$. Nous appliquons le théorème 7.10. La continuité par rapport au paramètre x étant claire, il faut obtenir la majoration exigée par le (i'') du théorème. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $\varphi(z - y) = 0$ si $|x - z| \leq 1$ et $|y| \geq r := R + |x| + 1$, car dans ce cas nous avons $|z - y| \geq R$ (justifier). Il s'ensuit que

$$f * \varphi(z) = \int_{B(0, r)} h(y, z) dy, \quad \forall z \in \overline{B}(x, 1).$$

De ce qui précède, nous avons la majoration

$$|h(y, z)| \leq g(y) := C_0 |f(y)| \chi_{B(0, r)}(y), \quad \forall z \in \overline{B}(x, 1).$$

Pour conclure, il suffit de noter que g est intégrable, car, par l'inégalité de Hölder, si q est le conjugué de p alors

$$\|g\|_{L^1} \leq C_0 \|f\|_{L^p} \|\chi_{B(0, r)}\|_{L^q} = C \|f\|_{L^p} \text{ (avec } C = C(r) < \infty \text{)}.$$

La continuité de $f * \partial^\alpha \varphi$ (avec ∂^α dérivée partielle d'ordre $\leq k$) se montre de la même manière.

*Étape 3. Preuve de $\partial_j(f * \varphi) = f * (\partial_j \varphi)$.* Le raisonnement est analogue à celui de l'étape 2 ; on utilise le théorème 7.14 au lieu du théorème 7.10 (vérifier). Par récurrence sur l'ordre de différentiation, ceci permet d'établir c) pour tous les α concernés.

Pour conclure, $f * \varphi$ a, jusqu'à l'ordre k , des dérivées partielles continues qui vérifient c). Elle est donc de classe C^k et a les propriétés a)–c). La preuve est complète. $\square$

L'ingrédient clé de la preuve du théorème 11.9 est le lemme suivant.

11.19 Lemme. Soit $1 \leq p < \infty$. Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\delta > 0$.

Alors il existe une fonction étagée de la forme $g = \sum_j a_j \chi_{K_j}$, avec K_j compact, $\forall j$, telle que $\|f - g\|_{L^p} < \delta$.

De manière équivalente, l'espace vectoriel engendré par les fonctions χ_K , avec $K \subset \mathbb{R}^n$ compact, est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.[†] $\diamond$

Démonstration du lemme 11.19. Nous pouvons supposer f borélienne (justifier). Soit $(f_k)_k$ une suite de fonctions boréliennes étagées telle que $\text{sgn } f_k = \text{sgn } f$, $\forall k$, $f_k \rightarrow f$ et $|f_k| \nearrow |f|$ (l'existence d'une telle suite découle de la preuve du théorème 3.5). Par convergence dominée, nous avons $\|f_k - f\|_{L^p} \rightarrow 0$; par ailleurs, $f_k \in \mathcal{L}^p$, $\forall k$ (justifier).

Chaque f_k étant une somme finie de la forme $\sum_j a_j \chi_{A_j}$, avec A_j borélien et $\nu_n(A_j) < \infty$ (la dernière propriété découlant de $f_k \in \mathcal{L}^p$; justifier), il suffit de montrer la conclusion du lemme si $f = \chi_A$, avec A borélien de mesure de Lebesgue finie (détailler). Dans ce cas, rappelons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que l'on ait $K \subset A$ et $\nu_n(A \setminus K) < \varepsilon$ (corollaire 4.27).

Nous obtenons $\|\chi_A - \chi_K\|_{L^p} = \|\chi_{A \setminus K}\|_{L^p} = (\nu_n(A \setminus K))^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$. ε étant arbitraire, nous obtenons le résultat désiré de densité. CQFD

Démonstration du théorème 11.9. Nous considérons uniquement un noyau régularisant *standard*; le cas d'un noyau régularisant général est analogue.

Pour la deuxième partie du théorème, il suffit de noter que $f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (proposition 11.7) et d'appliquer (11.10).

Soit

$$X := \{f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n); f * \rho_\varepsilon \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0\}. \quad (11.12)$$

Par linéarité du produit de convolution par rapport au premier argument, X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p$.

Étape 1. X est fermé dans $\mathcal{L}^p$. Soit $(f_j)_j \subset X$ avec $f_j \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p$. Soit $\delta > 0$. Alors il existe un j et un ε_0 tels que $\|f_j - f\|_{L^p} < \delta/3$ et $\|f_j * \rho_\varepsilon - f_j\|_{L^p} < \delta/3$, $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. L'inégalité de Young et le fait que $\|\rho_\varepsilon\|_{L^1} = 1$, $\forall \varepsilon$ (exercice 11.13) donnent

$$\begin{aligned} \|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p} &\leq \|(f - f_j) * \rho_\varepsilon\|_{L^p} + \|f_j * \rho_\varepsilon - f_j\|_{L^p} + \|f_j - f\|_{L^p} \\ &\leq \|f - f_j\|_{L^p} + \|f_j * \rho_\varepsilon - f_j\|_{L^p} + \|f_j - f\|_{L^p} < \delta, \quad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

δ étant arbitraire, nous obtenons que $f \in X$.

[†]. Par abus de langage, comme expliqué dans la remarque 11.10, la conclusion du lemme 11.19 est que les fonctions étagées de la forme $g = \sum_j a_j \chi_{K_j}$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, la conclusion reste valable si nous remplaçons $\mathbb{R}^n$ par un ouvert de $\mathbb{R}^n$; ceci découle de la preuve du lemme 11.19.

Au vu du lemme 11.19 et de ce qui précède, afin de conclure il suffit de montrer

Étape 2. Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, nous avons $\chi_K \in X$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$. Posons, pour $j \geq 1$,

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n ; \text{dist}(x, K) \leq 1/j\} = \cup_{x \in K} \overline{B}(x, 1/j) \quad (11.13)$$

(justifier la deuxième égalité en utilisant le fait que, si $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et $y \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $x \in F$ tel que $\text{dist}(y, F) = |y - x|$).

L'ensemble K_j est compact, $\forall j$, et nous avons $K_j \searrow K$ (exercice 11.15). Comme $\nu_n(K_1) < \infty$, le théorème de la suite décroissante implique l'existence d'un j tel que $\nu_n(K_j \setminus K) < \delta$ (justifier).

Posons $\varepsilon_0 := 1/j$. Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Notons les faits suivants (évidents sur un dessin; les justifier en utilisant la deuxième égalité dans (11.13)) :

$$\text{si } x \in K \text{ et } y \in B(0, \varepsilon), \text{ alors } x - y \in K_j, \text{ et donc } \chi_{K_j}(x - y) = 1; \quad (11.14)$$

$$\text{si } x \notin K_j \text{ et } y \in B(0, \varepsilon), \text{ alors } x - y \notin K, \text{ et donc } \chi_K(x - y) = 0. \quad (11.15)$$

Il s'ensuit de (11.14) que

$$\begin{aligned} x \in K \implies \chi_{K_j} * \rho_\varepsilon(x) &= \int_{B(0, \varepsilon)} \chi_{K_j}(x - y) \rho_\varepsilon(y) dy = \int_{B(0, \varepsilon)} \rho_\varepsilon(y) dy, \\ &= 1 = \chi_K(x), \end{aligned}$$

d'où

$$x \in K \implies \chi_K(x) - \chi_K * \rho_\varepsilon(x) = (\chi_{K_j} - \chi_K) * \rho_\varepsilon(x) = \chi_{K_j \setminus K} * \rho_\varepsilon(x). \quad (11.16)$$

De même, (11.15) donne (vérifier)

$$x \notin K_j \implies \chi_K(x) - \chi_K * \rho_\varepsilon(x) = 0. \quad (11.17)$$

Par ailleurs, pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons (vérifier) $0 \leq \chi_K * \rho_\varepsilon(x) \leq 1$, d'où

$$x \in K_j \setminus K \implies |\chi_K(x) - \chi_K * \rho_\varepsilon(x)| = \chi_K * \rho_\varepsilon(x) \leq 1. \quad (11.18)$$

En combinant (11.16)–(11.18), nous obtenons

$$|\chi_K - \chi_K * \rho_\varepsilon| \leq \chi_{K_j \setminus K} * \rho_\varepsilon + \chi_{K_j \setminus K}, \quad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (11.19)$$

L'inégalité (11.19) et celles de Minkowski et Young donnent (détailler) :

$$\begin{aligned} \|\chi_K - \chi_K * \rho_\varepsilon\|_{L^p} &\leq \|\chi_{K_j \setminus K} * \rho_\varepsilon\|_{L^p} + \|\chi_{K_j \setminus K}\|_{L^p} \\ &\leq \|\chi_{K_j \setminus K}\|_{L^p} \|\rho_\varepsilon\|_{L^1} + \|\chi_{K_j \setminus K}\|_{L^p} = 2 \|\chi_{K_j \setminus K}\|_{L^p} \\ &= 2 (\nu_n(K_j \setminus K))^{1/p} < 2 \delta^{1/p}, \quad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (11.20)$$

$\delta > 0$ étant arbitraire, nous obtenons (11.10) pour $f = \chi_K$.

CQFD

En examinant la preuve de (11.19), nous déduisons le résultat suivant.

11.20 Lemme (Existence de fonctions plateau ; lemme d'Urysohn). Soient

$K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, avec K compact et U ouvert.

Il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$ telle que :

- i) $0 \leq \varphi \leq 1$ sur U .
- ii) $\varphi = 1$ sur K .

◇

Démonstration du lemme 11.20. Soit $\varepsilon_0 := \text{dist}(K, U^c)$, de sorte que $\varepsilon_0 > 0$ (pourquoi?).

Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$. Posons

$$L := \{x \in \mathbb{R}^n ; \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}, \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n ; \text{dist}(x, K) \leq 2\varepsilon\}.$$

Alors $K \subset L \subset M \subset U$ et M est un compact (vérifier). Soit ρ un noyau régularisant standard. La preuve de (11.19) implique que $\varphi := \chi_L * \rho_\varepsilon$ a toutes les propriétés requises ; en particulier, $\varphi(x) = 0$ si $x \notin M$, et donc $\varphi \in C_c^\infty(U)$. CQFD

Démonstration du théorème 11.11. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Soit $\bar{f}$ le prolongement de f avec la valeur 0 à $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, de sorte que $\bar{f} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\bar{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\bar{f} - \bar{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/2$; l'existence de $\bar{g}$ suit du théorème 11.9.

Soit g la restriction de $\bar{g}$ à Ω . Nous avons $g \in C^\infty(\Omega) \cap \mathcal{L}^p(\Omega)$ et (justifier)

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\bar{f} - \bar{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/2.$$

Il reste à trouver $h \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\|g - h\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/2$.

Rappelons le résultat suivant de topologie : il existe une suite $(K_j)_{j \geq 1}$ de compacts telle que $K_j \nearrow \Omega$ (voir l'exercice 11.16).

Soit, comme dans le lemme 11.20, $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi_j \leq 1$ et $\varphi_j = 1$ sur K_j . Nous avons $\varphi_j \rightarrow 1$ simplement dans Ω (justifier). Comme $|g\varphi_j - g| \leq |g|$ et $g\varphi_j \rightarrow g$ simplement, nous obtenons par convergence dominée que $\|g\varphi_j - g\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$. Pour j suffisamment grand, $h := g\varphi_j$ convient. CQFD

11.3 Pour aller plus loin

Si $1 \leq p < \infty$, nous savons (théorème 11.11) que $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Ce résultat permet, dans certains cas, d'établir des propriétés de *toutes* les fonctions $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ en étudiant *uniquement* les fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$. Nous donnons ici quelques exemples typiques.

11.21 Proposition. Soient p, q exposants conjugués. Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$. ◇

Démonstration de la proposition 11.21. Nous avons soit $p < \infty$, soit $q < \infty$. Supposons par exemple $p < \infty$.

Étape 1. Preuve si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dans ce cas, la conclusion découle de la proposition 11.7.

Étape 2. Preuve si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $(f_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $f_j \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p$ (l'existence de la suite découle du théorème 11.11). Nous pouvons travailler avec un représentant de f , encore noté f . Alors l'inégalité de Hölder donne

$$|f_j * g(x) - f * g(x)| = |(f_j - f) * g(x)| \leq \|f_j - f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \rightarrow 0 \text{ quand } j \rightarrow \infty.$$

Il s'ensuit que $f * g$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, donc continue. CQFD

11.22 Notation. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$. ◇

L'exercice suivant sera utilisé dans la preuve de la proposition 11.24.

11.23 Exercice. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall h$. ◇

11.24 Proposition (Continuité des translations dans L^p). Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, nous avons $\tau_h f \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ quand $h \rightarrow 0$.

De même dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. ◇

Démonstration de la proposition 11.24. Compte tenu de l'exercice 11.23, il suffit d'établir le résultat dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Étape 1. Preuve si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $R < \infty$ tel que $f(x) = 0$ si $|x| \geq R$. Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $|h| \leq 1$. Si $|x| \geq R + 1$, alors $\tau_h f(x) = 0$ et $f(x) = 0$ (vérifier).

Par ailleurs, soit $M := \max\{|\nabla f(x)|; x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$ (justifier la finitude de M). Le théorème des accroissements finis donne (vérifier)

$$|\tau_h f(x) - f(x)| \leq M |h|, \forall x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Il s'ensuit que, pour $|h| \leq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{L^p}^p &= \int_{B(0, R+1)} |\tau_h f(x) - f(x)|^p dx \\ &\leq M^p |h|^p \int_{B(0, R+1)} dx \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Étape 2. Preuve si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon/3$ (l'existence de g suit du théorème 11.11). Soit $\delta > 0$ tel que $\|\tau_h g - g\|_{L^p} < \varepsilon/3$ si $|h| < \delta$ (l'existence de δ découle de la première étape).

En notant que $\|\tau_h k\|_{L^p} = \|k\|_{L^p}$, $\forall k \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ (vérifier), nous obtenons, pour $|h| < \delta$:

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{L^p} &\leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &= \|\tau_h(f - g)\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &= \|f - g\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, nous obtenons la conclusion de la proposition.

CQFD

Nous allons maintenant considérablement généraliser le résultat de convergence (11.10), en affaiblissant les conditions sur (l'analogue de) ρ_ε .

11.25 Définition (Approximation de l'identité). Une *approximation de l'identité* est une famille $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que :

- i) $\zeta^\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est (Lebesgue) intégrable, $\forall \varepsilon > 0$.
- ii) $\int \zeta^\varepsilon = 1, \forall \varepsilon > 0$.
- iii) Il existe une constante $M < \infty$ telle que $\int |\zeta^\varepsilon| \leq M, \forall \varepsilon > 0$.
- iv) Pour tout $\delta > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta)} |\zeta^\varepsilon| = 0$.

Définition analogue lorsqu'il s'agit d'une suite $(\zeta^j)_{j \geq 1}$.

◇

Un exemple fondamental d'approximation de l'identité est donné par le résultat suivant.

11.26 Proposition. Soit $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int \rho = 1$. Soit, comme dans (11.9),

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho(x/\varepsilon), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Alors $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'identité.

En particulier, cette proposition s'applique lorsque ρ est un noyau régularisant.

◇

Démonstration.

- i) + ii) + iii) Nous avons $\int \rho_\varepsilon = \int \rho = 1$ et $\int |\rho_\varepsilon| = \int |\rho| := M < \infty$ (vérifier), de sorte que i)–iii) sont satisfaites.
- iv) Soit $\delta > 0$. Nous avons (justifier, en utilisant le changement linéaire de variables $\Phi(y) := \varepsilon y$)

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta)} |\rho_\varepsilon(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta/\varepsilon)} |\rho(y)| dy \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

la dernière conclusion étant une conséquence du théorème de convergence dominée (justifier).

CQFD

Le résultat suivant généralise le théorème 11.9.

11.27 Théorème. Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'identité.

Pour tout $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ nous avons $f * \zeta^\varepsilon \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

De même pour une suite $(\zeta^j)_{j \geq 1}$.

De même dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. ◇

Démonstration. Étape 1. Preuve quand $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour les besoins des résultats à venir, nous allons estimer la différence $f * \zeta^\varepsilon - f$ lorsque f a la propriété plus faible $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Rappelons qu'une telle fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

Donné $\xi > 0$, soit $0 < \delta < 1$ tel que

$$[\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, |x - x'| < \delta] \implies |f(x) - f(x')| < \xi.$$

Soit $C < \infty$ tel que $|f(x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}^n$ (justifier l'existence de C). Enfin, soit $R < \infty$ tel que $f(x) = 0$ si $|x| \geq R$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\begin{aligned} |f * \zeta^\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int f(x-y) \zeta^\varepsilon(y) dy - f(x) \right| \\ &= \left| \int (f(x-y) - f(x)) \zeta^\varepsilon(y) dy \right| \\ &\leq \int |f(x-y) - f(x)| |\zeta^\varepsilon(y)| dy \\ &= \int_{B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)| |\zeta^\varepsilon(y)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)| |\zeta^\varepsilon(y)| dy \\ &\leq \xi \int_{B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon(y)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)| |\zeta^\varepsilon(y)| dy \\ &\leq \xi \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta^\varepsilon(y)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)| |\zeta^\varepsilon(y)| dy \\ &\leq M \xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)| |\zeta^\varepsilon(y)| dy \\ &\leq M \xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} (|f(x-y)| + |f(x)|) |\zeta^\varepsilon(y)| dy \\ &\leq M \xi + 2C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon(y)| dy. \end{aligned} \tag{11.21}$$

Par ailleurs, si $|x| \geq R + 1$ et $|y| < \delta < 1$, alors $f(x) = f(x-y) = 0$. Il s'ensuit que pour

un tel x le calcul (11.21) donne

$$\begin{aligned} |f * \zeta^\varepsilon(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta)} |f(x-y)| |\zeta^\varepsilon(y)| dy \\ &= |f| * (|\zeta^\varepsilon| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta)})(x). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Soit $r = r_{\delta, \varepsilon} := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta)} |\zeta^\varepsilon(y)| dy$, de sorte que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_{\delta, \varepsilon} = 0, \forall \delta > 0$. Soit $\psi = \psi_{\delta, \varepsilon} := |\zeta^\varepsilon| \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta)}$, qui vérifie $\|\psi\|_{L^1} = r$.

En utilisant (11.21) si $|x| < R+1$ et (11.22) si $|x| \geq R+1$, nous obtenons, grâce à l'inégalité de Young et avec $N = N(R) < \infty$:

$$\begin{aligned} \|f * \zeta^\varepsilon - f\|_{L^p}^p &\leq \int_{B(0, R+1)} [M \xi + 2C r]^p dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, R+1)} [|f| * \psi]^p \\ &\leq N [M \xi + 2C r]^p + \int_{\mathbb{R}^n} [|f| * \psi]^p \\ &\leq N [M \xi + 2C r]^p + \|f\|_{L^p}^p \|\psi\|_{L^1}^p \rightarrow N M^p \xi^p \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11.23)$$

$\xi > 0$ étant arbitraire, nous obtenons que $f * \zeta^\varepsilon \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Étape 2. Preuve si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\xi > 0$. Soient $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que $\|f - g\|_{L^p} < \xi$ et $\|g * \zeta^\varepsilon - g\|_{L^p} < \xi, \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Pour un tel ε , nous avons (détailler)

$$\begin{aligned} \|f * \zeta^\varepsilon - f\|_{L^p} &\leq \|f * \zeta^\varepsilon - g * \zeta^\varepsilon\|_{L^p} + \|g * \zeta^\varepsilon - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &\leq \|(f - g) * \zeta^\varepsilon\|_{L^p} + 2\xi \leq \|f - g\|_{L^p} \|\zeta^\varepsilon\|_{L^1} + 2\xi \leq (M + 2)\xi. \end{aligned}$$

$\xi > 0$ étant arbitraire, nous obtenons la conclusion du théorème pour f .

CQFD

Au passage, nous avons montré le résultat suivant (voir (11.21)).

11.28 Corollaire. Soit $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une approximation de l'identité. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Nous avons $f * \zeta^\varepsilon$ uniformément dans $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. $\diamond$

Ce corollaire intervient dans la preuve du résultat suivant.

11.29 Théorème (Théorème d'approximation de Weierstrass). Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Soit $f \in C(K, \mathbb{R})$.

Alors il existe une suite de polynômes[†] de n variables $(P_j)_j$ telle que $P_j \rightarrow f$ uniformément sur K .

De manière équivalente, $\{P : K \rightarrow \mathbb{R}; P \text{ fonction polynômiale}\}$ est dense dans $C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. $\diamond$

†. Ou plutôt de fonctions polynômiales.

Démonstration. Nous utilisons le résultat suivant de topologie (théorème de Tietze) : si B est une boule de $\mathbb{R}^n$ telle que $K \subset B$, alors toute fonction $f \in C(K, \mathbb{R})$ admet une extension $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B$. Ainsi, quitte à remplacer K par $\overline{B}$ et f par g , il suffit de montrer le résultat pour la restriction à $\overline{B}$ d'une fonction $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui s'annule en dehors de B (justifier). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $B = B(0, R)$.

Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(x) = 0$ si $|x| \geq R$. Soit ρ la « gaussienne standard » dans $\mathbb{R}^n$,

$$\rho(x) := \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Rappelons que $\int \rho = 1$. La proposition 11.26 combinée avec le corollaire 11.28 donne $f * \rho_\varepsilon \rightarrow f$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, où

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\pi^{n/2} \varepsilon^n} e^{-|x|^2/\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (11.24)$$

Soit $\delta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^\infty} < \delta$, d'où (exercice 10.10)

$$|f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| < \delta, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (11.25)$$

Nous allons trouver un polynôme S tel que

$$|(\rho_\varepsilon - S)(z)| \leq \delta, \forall z \in \overline{B}(0, 2R). \quad (11.26)$$

En admettant l'existence d'un tel S , nous concluons de la façon suivante. Pour tout φ nous avons

$$f * \varphi(x) = \int_{\overline{B}(0, R)} f(y) \varphi(x - y) dy. \quad (11.27)$$

Soit $M < \infty$ tel que $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Si $x, y \in \overline{B}(0, R)$, alors $x - y \in \overline{B}(0, 2R)$. En combinant ce fait avec (11.25)–(11.27), il s'ensuit que, pour tout $x \in \overline{B}(0, R)$ nous avons, avec $N = N(R) < \infty$,

$$\begin{aligned} |f * S(x) - f(x)| &\leq |f * [S(x) - \rho_\varepsilon](x)| + |(f * \rho_\varepsilon - f)(x)| \\ &< \left| \int_{\overline{B}(0, R)} f(y) [S - \rho_\varepsilon](x - y) dy \right| + \delta \\ &\leq M \delta \int_{\overline{B}(0, R)} dy + \delta = N \delta. \end{aligned}$$

$\delta > 0$ étant arbitraire nous obtenons, pour une suite $(S_j)_j$ convenable de polynômes, $f * S_j \rightarrow f$ uniformément sur B quand $j \rightarrow \infty$. Pour conclure, il suffit de noter que $f * S_j$ est un polynôme (exercice 11.14 d)).

Ainsi, pour compléter la preuve il suffit de trouver S satisfaisant (11.26). Rappelons que le développement en série de l'exponentielle converge vers l'exponentielle uniformément sur les compacts : si $T > 0$ et $\xi > 0$, alors il existe k tel que

$$\left| e^t - \sum_{\ell=0}^k \frac{t^\ell}{\ell!} \right| \leq \xi, \quad \forall t \in [-T, T]. \quad (11.28)$$

Soit k tel que (11.28) soit valide avec $T := 4R^2/\varepsilon^2$ et $\xi := \pi^{n/2} \varepsilon^n \delta$. Posons

$$S := \frac{1}{\pi^{n/2} \varepsilon^n} \sum_{\ell=0}^k \frac{(-|x|^2/\varepsilon^2)^\ell}{\ell!}. \quad (11.29)$$

De (11.28), (11.29) et (11.24), nous avons (11.26) (vérifier!).

CQFD