

10.3 Norme et complétude

Dans cette section, nous montrons que L^p est un *espace normé complet* (théorème de Fatou 10.28), et en particulier que $\|\cdot\|_{L^p}$ est une *norme* sur L^p (inégalité de Minkowski, théorème 10.26).

10.26 Théorème (Inégalité de Minkowski).

- a) Si $1 \leq p \leq \infty$, alors $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}, \forall f, g$.
 b) $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace normé et $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace « semi-normé ».[†]

10.27 Corollaire. L'application $L^p \ni f \mapsto \|f\|_{L^p} \in \mathbb{R}$ est continue. $\diamond$

10.28 Théorème (Théorème de Fatou). L^p est un espace normé complet, $\forall 1 \leq p \leq \infty$.[‡]

10.29 Corollaire. Si $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ et une fonction $g \in \mathcal{L}^p$ telles que

- a) $f_{n_k} \rightarrow f$ p. p.
 b) $|f_{n_k}| \leq g$ p. p. $\diamond$

10.30 Proposition. Dans L^2 ,

$$\langle f, g \rangle := \int f g, \forall f, g \in L^2, \quad (10.13)$$

est un produit scalaire, et $\|f\|_{L^2} = \langle f, f \rangle^{1/2}$.[§] $\diamond$

Démonstrations

Démonstration du théorème 10.26. Nous pouvons travailler avec des fonctions finies en tout point (justifier).

- a) Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ suivent de l'exercice 10.9 e). Nous pouvons donc supposer $1 < p < \infty$ et aussi $\|f\|_{L^p} < \infty, \|g\|_{L^p} < \infty$.

La fonction $t \mapsto \Phi(t) := |t|^p$ étant convexe,[†] nous avons $\Phi((s+t)/2) \leq (\Phi(s) + \Phi(t))/2, \forall s, t \in \mathbb{R}$, d'où $|s+t|^p \leq 2^{p-1}(|s|^p + |t|^p), \forall s, t \in \mathbb{R}$ (vérifier). Ceci implique

†. Un espace semi-normé est un espace vectoriel muni d'une « semi-norme ». Une semi-norme $x \mapsto \|x\|$ vérifie toutes les propriétés de la norme sauf $\|x\| = 0 \implies x = 0$.

‡. Un espace normé complet est un « espace de Banach ». Donc L^p est un espace de Banach.

§. L^2 est donc un espace normé complet dont la norme provient d'un produit scalaire : c'est un « espace de Hilbert ».

†. Vérifier la convexité de la fonction Φ en étudiant la monotonie de sa dérivée.

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty\}$$

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) / \sim$$

$$\text{ou } f \sim g \text{ si } f = g \text{ p.p.}$$

$$\forall f \in \mathcal{L}^p, \quad \|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p}$$

" $\|f\|_{L^p}$

$$\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ dans } L^p$$

→ c-a-d: Si $(f_n)_n$ suite de fonctions $\mathcal{L}^p$ tq:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geq N, \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$$

$$\exists f \in \mathcal{L}^p, \quad \|f_n - f\|_p \xrightarrow{\text{max}} 0$$

$|f + g|^p \leq 2^{p-1} (|f|^p + |g|^p)$. En intégrant cette inégalité avec $f, g \in \mathcal{L}^p$, nous obtenons que $f + g \in \mathcal{L}^p$.

Comme $f + g \in \mathcal{L}^p$, nous pouvons appliquer la proposition 10.19 a). Avec q le conjugué de p , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p} &= \sup \left\{ \int (f + g) h; h \in \mathcal{L}^q, \|h\|_{L^q} \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int f h; h \in \mathcal{L}^q, \|h\|_{L^q} \leq 1 \right\} + \sup \left\{ \int g h; h \in \mathcal{L}^q, \|h\|_{L^q} \leq 1 \right\} \\ &= \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \end{aligned}$$

b) Les propriétés de (semi-)norme de $\|\cdot\|_{L^p}$ suivent de l'exercice 10.9.

CQFD

Démonstration du corollaire 10.27. Ceci est vrai pour toute norme (car une norme est, d'après l'inégalité triangulaire, lipschitzienne de constante 1).

CQFD

Démonstration du théorème 10.28. Nous pouvons travailler avec des fonctions (justifier).

Rappelons le principe suivant de preuve. Pour montrer qu'un espace métrique (en particulier, normé) est complet, il suffit de montrer que toute suite de Cauchy contient une sous-suite convergente. Pour construire une telle sous-suite dans le cadre du théorème 10.28, nous reprenons essentiellement la preuve du théorème 7.5.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p$ et soit $(f_{n_k})_k$ une sous-suite telle que

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^p} \leq 2^{-k-1}, \forall k \geq 0.$$

Supposons d'abord $1 \leq p < \infty$. Pour tout $k \geq 1$, posons

$$g_k := |f_{n_0}| + \sum_{j=0}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|.$$

La suite $(g_k)_k$ étant croissante, nous pouvons définir $g := \lim_k g_k$.

L'inégalité triangulaire et l'inégalité de Minkowski impliquent

$$|f_{n_k}| \leq g_k \leq g \text{ et } \|g_k\|_{L^p} \leq \|f_{n_0}\|_{L^p} + 1. \quad (10.14)$$

Le théorème de convergence monotone et la deuxième partie de (10.14) donnent $\|g\|_{L^p} < \infty$. Nous avons en particulier $g(x) < \infty$ p. p. Si x est tel que $g(x) < \infty$, alors

$$|f_{n_0}(x)| + \sum_{j \geq 0} |(f_{n_{j+1}} - f_{n_j})(x)| = g(x) < \infty.$$

Il s'ensuit que pour un tel x la série $f_{n_0}(x) + \sum_{j \geq 0} ((f_{n_{j+1}} - f_{n_j})(x))$ converge vers un $f(x)$ tel que $|f(x)| \leq g(x)$ (justifier). Les sommes partielles de la série étant $(f_{n_k}(x))_k$, nous obtenons $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ et $|f_{n_k}(x)|^p \leq (g(x))^p$. Pour les autres x , nous définissons $f(x) = 0$.

De ce qui précède, nous avons $f \in \mathcal{L}^p$. Le théorème de convergence dominée (variante p. p.) donne $\int |f_{n_k} - f|^p \rightarrow 0$, d'où $f_{n_k} \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p$.

Enfin, supposons $p = \infty$. Soit $B \in \mathcal{T}$ négligeable tel que f_{n_0} soit bornée sur $X \setminus B$. Soit $A_k \in \mathcal{T}$ un ensemble négligeable tel que $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq 2^{-k-1}$ dans $X \setminus A_k$. Soit $A := B \cup \cup_k A_k \in \mathcal{T}$, qui est encore négligeable. Sur $X \setminus A$, f_{n_0} est bornée et la suite $(f_{n_k})_k$ est de Cauchy pour la norme uniforme. Elle converge donc uniformément vers une fonction bornée f . En posant $f(x) = 0$ si $x \in A$, nous avons $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $f_{n_k} \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^\infty$ (vérifier). CQFD

Démonstration du corollaire 10.29. $(f_n)_n$ étant une suite de Cauchy, si $1 \leq p < \infty$ le corollaire découle de la preuve du théorème 10.28.

Si $p = \infty$, a) découle de la preuve du théorème 10.28, et pour b) nous pouvons prendre $g := \sup_n \|f_n\|_{L^\infty}$. CQFD

Démonstration de la proposition 10.30. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que $\langle f, g \rangle$ est bien défini. La linéarité dans chaque variable et la symétrie étant évidentes, il suffit de vérifier que $\langle f, f \rangle = 0 \implies f = 0$. Ceci découle de la dernière égalité de l'énoncé, qui est claire. CQFD

10.4 Pour aller plus loin

Soient p, q exposants conjugués. Si $g \in L^q$, alors l'inégalité de Hölder montre que l'application

$$T : L^p \rightarrow \mathbb{R}, T(f) := \int f g, \forall f \in L^p, \quad (10.15)$$

est linéaire, continue et de norme $\leq \|g\|_{L^q}$.

Si $1 < p \leq \infty$, la proposition 10.19 (appliquée à $\|g\|_{L^q}$) montre que la norme de T est égale à $\|g\|_{L^q}$. De même pour $p = 1$, si μ est σ -finie.

Le résultat suivant montre que (10.15) donne toutes les applications linéaires et continues $T : L^p \rightarrow \mathbb{R}$.

10.31 Théorème (Théorème de représentation de Riesz). Soit $T : L^p \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continue.

a) Si $1 < p < \infty$, alors il existe $g \in L^q$ telle que

$$T(f) = \int f g, \forall f \in L^p. \quad (10.16)$$

De plus, la norme de T est $\|g\|_{L^q}$.

b) Si $p = 1$ et μ est σ -finie, alors il existe $g \in L^\infty$ telle que

$$T(f) = \int f g, \quad \forall f \in L^1. \quad (10.17)$$

De plus, la norme de T est $\|g\|_{L^\infty}$.

Le théorème ne mentionne pas L^∞ : les applications linéaires et continues sur L^∞ sont connues, mais très difficiles à décrire.

Pour la preuve du théorème 10.31, voir par exemple Lieb et Loss [16, Theorem 2.14]. Voir également l'éclairage apporté dans la à la fin de la section 14.4 et surtout dans la section 14.5.

Chapitre 11

Convolution

11.0 Aperçu

La *convolution* est historiquement apparue dans la résolution des équations différentielles, mais ses utilisations les plus fréquentes sont liées au *lissage* des fonctions, c'est-à-dire à l'approximation d'une fonction peu régulière (par exemple discontinue) par des fonctions plus lisses (par exemple de classe C^∞).

Donnons un exemple simple de telle approximation. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Posons

$$F^\varepsilon(x) := \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0. \quad (11.1)$$

Le théorème de Lagrange donne l'existence d'un point $\xi = \xi(x, \varepsilon) \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ tel que $F^\varepsilon(x) = f(\xi)$. Quand ε est petit, ξ est proche de x , et donc, du moins intuitivement, F^ε est proche de f .[†] Par ailleurs, F^ε est plus lisse que f : si f est continue, alors F^ε est de classe C^1 (théorème de Leibniz-Newton), et plus généralement, si $f \in C^k$, alors $F^\varepsilon \in C^{k+1}$.

Dans ce chapitre, nous allons expliquer un procédé général d'approximation. Il est basé sur le *produit de convolution*, qui associe à deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la « fonction »

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy ; \quad (11.2)$$

les guillemets attirent l'attention sur le fait que les intégrales de (11.2) n'existent pas nécessairement.

[†]. Et, en effet, si f est *uniformément continue*, alors $F^\varepsilon \rightarrow f$ uniformément sur $\mathbb{R}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Si f est « seulement » continue, alors $F^\varepsilon \rightarrow f$ simplement quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

$f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesmalts

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

ex. $f(x) = e^{-ax^2}$, $g(x) = e^{-bx^2}$ $a, b > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x-y)^2} e^{-by^2} dy$$
$$= e^{-ax^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2 + 2axy - by^2} dy$$

$$-ay^2 + 2axy - by^2 = -(a+b)\left(y^2 - \frac{2a}{a+b}xy\right)$$
$$= -(a+b)\left(\left(y - \frac{ax}{a+b}\right)^2 - \frac{a^2x^2}{(a+b)^2}\right)$$
$$= -(a+b)\left(y - \frac{ax}{a+b}\right)^2 + \frac{ax^2}{a+b}$$

$$f * g(x) = e^{-\frac{ax^2 + \frac{ax^2}{a+b}}{a+b}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(a+b)\left(y - \frac{ax}{a+b}\right)^2} dy$$

$\stackrel{y' = y - ax/a+b}{=} e^{-\frac{ax^2 + \frac{ax^2}{a+b}}{a+b}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(a+b)y'^2} dy' = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-\frac{abx^2}{a+b}}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

La formule (11.1) peut se réécrire comme

$$F^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\varepsilon} f(y) \xi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x - y) dy, \quad (11.3)$$

qui est une convolution.

Dans un premier temps, nous allons donner des conditions sur f et g (*inégalité de Young*, théorème 11.2) qui assurent que le produit de convolution est bien défini.

Par la suite, nous allons décrire une bonne classe de fonctions g telles que $f * g$ soit lisse (proposition 11.7).

La partie la plus importante est celle qui donne le mécanisme proprement dit d'approximation. Si nous revenons à (11.3), nous avons $F^\varepsilon = f * g_\varepsilon$, où

$$g(x) := \frac{1}{2} \chi_{[-1, 1]}, \quad g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} g(x/\varepsilon), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (11.4)$$

Le résultat fondamental de ce chapitre, le théorème 11.9, affirme que, si $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convenable,[†] alors, pour $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, nous avons

$$f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } f * \rho_\varepsilon \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (11.5)$$

Énoncé convenablement, le même résultat reste vrai dans les espaces L^p .

La section 11.3 contient des conséquences de ce résultat d'approximation, et des généralisations de celui-ci, sous des hypothèses plus faibles sur ρ (théorème 11.27).

Nous finissons par le *théorème d'approximation de Weierstrass* 11.29 : « toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^n$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales », théorème dont la preuve « historique » passe par la convolution.

Compétences minimales attendues.

- a) Savoir appliquer l'inégalité de Young.
- b) Savoir raisonner « par densité », en utilisant la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$ (théorème 11.11). $\diamond$

Dans ce chapitre, nous considérons uniquement des *fonctions* ou classes d'équivalence f, g , etc., définies sur $\mathbb{R}^n$ ou sur une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ et qui sont *Lebesgue mesurables*. La mesure sous-jacente est λ_n , sur la tribu $\mathcal{L}_n$. Cette mesure étant complète, nous pouvons travailler si nécessaire avec des fonctions définies p. p. : pour de telles fonctions, les notions de mesurabilité et intégrabilité sont bien définies (remarque 8.36).

†. ρ doit être bien plus lisse que notre g , et d'ailleurs l'existence d'un tel ρ n'est pas évidente.

11.1 Inégalité de Young

11.1 Définition (Produit de convolution). Le produit de convolution de $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy, \quad (11.6)$$

défini pour les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la fonction $y \mapsto f(x - y) g(y)$ a une intégrale.

D'après l'exercice 10.12, la définition du produit de convolution a aussi un sens pour des classes f et g . Dans la suite, nous travaillerons soit avec des classes, soit avec des fonctions boréliennes. (Rappelons que dans chaque classe nous pouvons choisir un représentant borélien; voir l'exercice 10.14 a.)

11.2 Théorème (Inégalité de Young). Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $1/p + 1/q \geq 1$. Soit $1 \leq r \leq \infty$ défini par l'égalité $1/r = 1/p + 1/q - 1$.

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors :

- a) Le produit de convolution $f * g$ est défini presque partout et définit une fonction Lebesgue mesurable.
- b) Nous avons $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (11.7)$$

- c) Si $1/p + 1/q = 1$ (et donc $r = \infty$), nous avons les conclusions plus fortes suivantes : $f * g$ est défini en tout point, et $|f * g(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Exercices

L'exercice suivant montre que le produit de convolution est *commutatif*.

11.3 Exercice. Nous avons $f * g(x) = g * f(x)$, au sens où l'une de ses quantités existe si et seulement si l'autre existe et dans ce cas elles sont égales. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration du théorème 11.2. Nous pouvons travailler avec des fonctions boréliennes (justifier).

- c) Par symétrie du produit, nous pouvons supposer $p < \infty$ (justifier). Avec $h(y) := f(x - y)$, l'inégalité triangulaire 6.23 a) et l'inégalité de Hölder donnent

$$|f * g|(x) \leq \int |h(y) g(y)| dy \leq \|h\|_{L^p} \|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

démo. si $r < \infty$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$$

remarque: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + 1 \Rightarrow \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} \Rightarrow r \leq p$

de même $q \leq r$.

supposons $f, g \geq 0$.

$$\forall x, f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

soit $h_x(y) = f(x-y)$

$$f * g(x) = \int \underbrace{h_x^{1/r} g^{1/r}}_{f_1} \underbrace{h_x^{1-\frac{1}{r}} g^{1-\frac{1}{r}}}_{f_2} dy$$

Or (Hölder) généralisée: $\int f_1 f_2 f_3 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3}$

si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1, p_1, p_2, p_3 \geq 1$.

$$p_1 = r, p_2 = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}, p_3 = \frac{1}{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}$$

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = \frac{r-p}{pr}$$

$$f * g(x) \leq \left(\int h_x^p g^q \right)^{1/2} \left(\int h_x^{p'} \right)^{1/2} \left(\int g^q \right)^{1/2}$$

$$(f * g(x))^2 \leq \int h_x^p g^q \underbrace{\|h_x\|_p^{2-p}}_{\|f\|_p^{2-p}} \|g\|_q^{2-q}$$

$$\Rightarrow \int (f * g(x))^2 dx \leq \|f\|_p^{2-p} \|g\|_q^{2-q} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_x(y)^p g(y)^q dy \right) dx}_{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_x(y)^p dx \right) g(y)^q dy}$$

$$\leq \|f\|_p^{2-p} \|g\|_q^{2-q} \|f\|_p^2 \|g\|_q^2 = \|f\|_p^2 \|g\|_q^2$$

$$\Rightarrow \|f * g\|_2 \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

$$\text{Si } f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x) dx < \infty$$

$$\Rightarrow f * g(x) < \infty \text{ p.p.}$$

Remarque: $f * g(x) = g * f(x)$ p.p.

Cas où f, g non forcément positives,

$$f_+ = \max\{f, 0\}, f_- = \max\{-f, 0\}$$

$$\text{alors } f_+, f_- \geq 0 \text{ et } f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-$$

Pause

(justifier la dernière égalité), ce qui au passage montre que $f * g$ est défini en tout point (justifier).

- a) + b) Supposons maintenant $1/p + 1/q > 1$ et donc $1 \leq r < \infty$. Il suffit de traiter le cas des fonctions positives. En effet, si les conclusions du théorème sont vraies pour $|f|$ et $|g|$, alors $f * g(x)$ est défini pour tout x tel que $|f| * |g|(x)$ soit fini, et pour un tel x nous avons

$$f * g(x) = f_+ * g_+(x) - f_+ * g_-(x) - f_- * g_+(x) + f_- * g_-(x)$$

et

$$|f * g|(x) \leq |f| * |g|(x),$$

d'où les parties a) et b) du théorème (justifier).

Si f, g sont boréliennes positives, alors $f * g(x)$ existe (mais peut être infini) pour tout x , car il s'agit de l'intégrale d'une fonction borélienne positive (vérifier que $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est borélienne). Il suffit donc de montrer (11.7), car dans ce cas nous avons $f * g \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)$ et donc $f * g(x) < \infty$ pour $\mathbb{R}^n \setminus A$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$ borélien négligeable. De manière équivalente, (11.7) donne que $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ (ce qui donne la partie a) du théorème).

Notons les relations suivantes : $p \leq r, q \leq r$ et $1/r + (1-p/r) + (1-q/r) = 1$. En utilisant ces faits et l'exercice 10.22 (avec $k := 3, p_1 := r, p_2 := (rp)/(r-p), p_3 := (rq)/(r-q)$ et la convention $1/0 = \infty$), nous obtenons, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et avec $h(y) := f(x-y)$:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} [h^{p/r}(y) g^{q/r}(y)] h^{1-p/r}(y) g^{1-q/r}(y) dy \\ &\leq \|h^{p/r} g^{q/r}\|_{L^r} \|h^{1-p/r}\|_{L^{(rp)/(r-p)}} \|g^{1-q/r}\|_{L^{(rq)/(r-q)}} \\ &= \|h^{p/r} g^{q/r}\|_{L^r} \|h\|_{L^p}^{1-p/r} \|g\|_{L^q}^{1-q/r} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x-y) g^q(y) dy \right)^{1/r} \|f\|_{L^p}^{1-p/r} \|g\|_{L^q}^{1-q/r} \end{aligned}$$

(vérifier et justifier les deux dernières lignes, en considérant séparément les cas où $p = r$ ou $q = r$).

Ceci implique (via le théorème de Tonelli)

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^r}^r &= \int_{\mathbb{R}^n} [f * g(x)]^r dx \leq \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x-y) g^q(y) dy \right) dx \\ &= \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x-y) dx \right) g^q(y) dy = \|f\|_{L^p}^r \|g\|_{L^q}^r \end{aligned}$$

(vérifier), d'où (11.7).

CQFD