

12.13 Théorème.

- a) (Critère de Dini) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. S'il existe deux nombres $f(x_0 \pm)$ et une fonction $G \in \mathcal{L}^1(]0, \pi[)$ telle que

$$|f(x_0 \pm) - f(x_0 \pm y)| \leq y G(y), \forall 0 < y < \pi, \quad (12.18)$$

alors

$$S_n(f)(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (12.19)$$

- b) En particulier, (12.19) est vraie si f a des limites latérales $f(x_0 \pm)$ en x_0 , et les limites

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x_0 \pm y) - f(x_0 \pm)}{y}$$

existent et sont finies.

- c) (Théorème de Dirichlet) En particulier, (12.19) est vraie en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ si f est « dérivable par morceaux ».

$$\text{où } c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

Théorème : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable par morceaux, 2π -périodique. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ $f(x+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$, $f(x-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$

Si, dans le théorème précédent, nous voulons abaisser la condition de régularité sur f de « dérivable » à « continue », alors la bonne notion de convergence est celle de convergence *en moyenne* (théorème de Fejér 12.15), la moyenne étant définie ci-dessous.

12.14 Définition. Si $f \in \mathcal{L}^1$, nous posons

$$T_n(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+. \quad (12.20)$$

12.15 Théorème (Théorème de Fejér).

- a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f a des limites latérales finies $f(x_0 \pm)$ en x_0 , alors

$$T_n(f)(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (12.21)$$

- b) Si f est continue, alors $T_n(f) \rightarrow f$ uniformément quand $n \rightarrow \infty$.

De manière équivalente, soit $f \in C([0, 2\pi])$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Alors $T_n(f) \rightarrow f$ uniformément sur $[0, 2\pi]$ quand $n \rightarrow \infty$.

†. $(T_n(f))_n$ est la *moyenne de Cesàro* de $(S_n(f))_n$.

ex.

Exercice #7. Développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) := |\sin x|$. En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin x e^{-ikx} dx + \int_0^{\pi} \sin(x) e^{ikx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin x \cos kx dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin(x+kx) + \sin(x-kx)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{1}{k+1} \cos(k+1)x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{1-k} \left[\cos(k-1)x \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(-1)^{k+1} - 1}{k+1} + \frac{1}{1-k} ((-1)^{k-1} - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-2}{2p+1} + \frac{1}{1-2p} \cdot (-2) \right) \\ &= -\frac{2}{2\pi} \left(\frac{1-2p + 2p+1}{-4p^2+1} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4p^2-1} \end{aligned}$$

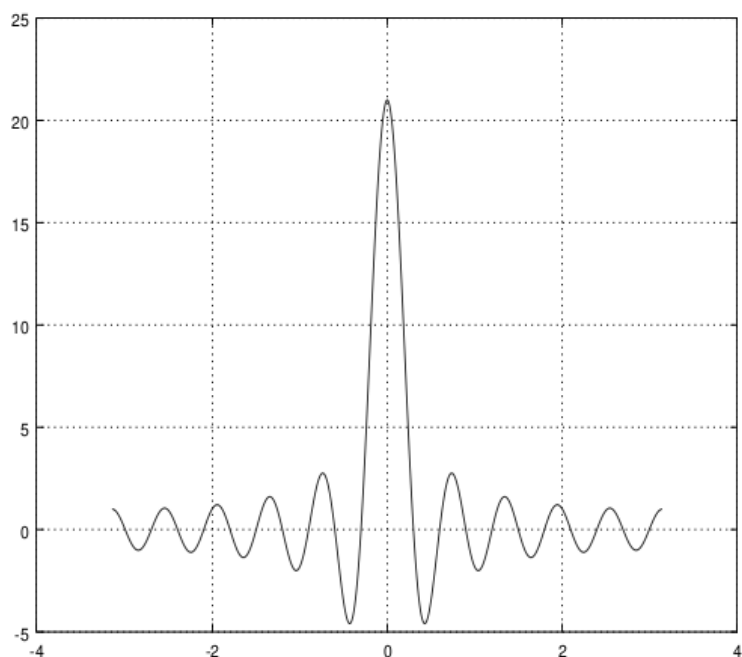
Noyau de Fejer

$$D_n = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

$$F_n = \frac{D_0 + \dots + D_n}{n+1}$$

Propriétés

$D_n, n=10 \downarrow$



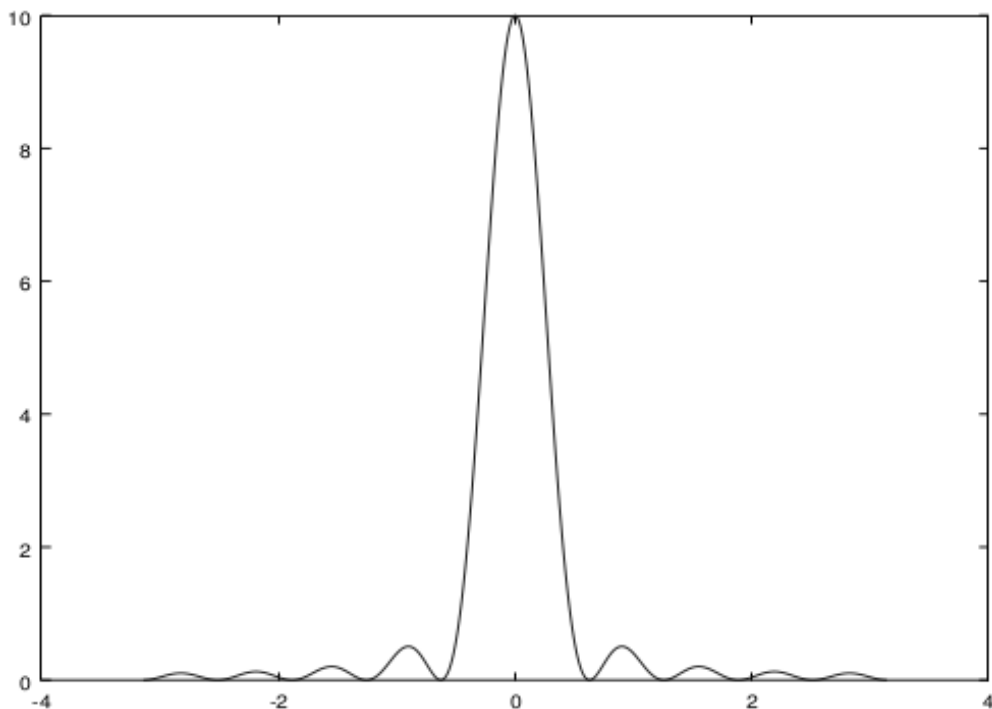
$$1) \forall y; F_n(y) \geq 0$$

$$2) \forall y, F_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\sin^2(y/2)} & \text{if } y \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{if } y \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$3) \int_0^\pi F_n = \int_{-\pi}^0 F_n = \pi$$

$$4) \forall 0 < \delta < \pi, \lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n\|_\infty = 0$$

$F_n, n=1, \dots, \infty$
 $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$



donc $c_k(f) = \frac{2}{\pi(4k^2-1)}$

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0$$

(en $x=0$)

Donc $\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

$$= -\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$$

Par ex pour 2)

$$D_k(x) = \sum_{l=-k}^k e^{ilx}$$

$$= e^{-ikx} \frac{e^{i(k+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

$$= e^{-ikx} \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2}} \frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^n D_k = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^n \sin((k+\frac{1}{2})x)$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n e^{i(k+\frac{1}{2})x}$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{ix/2} \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{i(\frac{n+1}{2})x} \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right)$$

$$= \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2})x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

Théorème de Fejér

Soit $f \in C_{2\pi}^0$ (continue et 2π péri.)
sur $\mathbb{R}$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f) - f\|_{\infty} = 0$

où $T_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)(x)$

Remarque : $T_n(f)(x)$ = polynôme trigonométrique

démo du théorème.

$$\begin{aligned} T_n(f)(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k c_l(f) e^{ilx} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ilt} e^{ilx} dt \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{il(x-t)} dt \\ &\quad \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) e^{ilt} dt}_{\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) e^{ilt} dt} \end{aligned}$$

$$T_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) e^{ilt} dt$$

$$\text{car } \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ilt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n = 1.$$

Donc $T_n(f)(x) - f(x)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) F_n(t) dt$$

$$|T_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} |f(x-t) - f(x)| |F_n(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq \delta} |f(x-t) - f(x)| |F_n(t)| dt$$

Or f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$, Soit $\alpha \delta \in \pi$ tq

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall |t| < \delta$$

$$|T_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt \right) \varepsilon + 2 \|f\|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq \delta} F_n(t) dt$$

$$\leq \varepsilon + 2 \|f\|_{\infty} \|F_n\|_{[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\text{Done } \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f) - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0).$$

□

$$f(x) - f(x')$$

$$\exists k \quad x, x' \in [4k\pi, 4k\pi + 4\pi]$$

$$|x - x'| < \pi$$

$$\begin{matrix} \times \\ x \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \times \\ x' \end{matrix}$$