

TP, L3 math pour l'enseignement. Calculer π

14 mars 2025

1 Calcul de π

Ici « Calculer » signifie utiliser des opérations élémentaires qui peuvent être effectuées à la main : additions, multiplications,... mais aussi racine carrée. Par contre des fonctions plus compliquées $\exp$, $\cos$,... ne sont à priori pas disponibles.

1.1 Méthode d'Archimède et d'Al Kashi

1. Écrire une fonction qui calcul la suite suivante défini par récurrence :

$$\begin{cases} t_{n+1} = \frac{1}{2} (t_n + s_n) \\ s_{n+1} = \sqrt{t_{n+1} s_n} \end{cases}$$

avec des conditions initiales que l'on peut calculer $s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $t_1 = 1$.

2. Tracer les éléments de la suite et observer que ces deux suites convergent vers $\frac{2}{\pi}$.
3. Rappeler les formules de trigonométrie pour $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$. Et en déduire les formules suivantes

$$\frac{1}{\tan(2\theta)} + \frac{1}{\sin(2\theta)} = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \frac{1}{\sin(2\theta) \tan(\theta)} = \frac{1}{2 \sin(\theta)^2}$$

Que peut-on alors proposer pour $(\tan(\frac{\theta}{2}))^{-1}$ et $(\sin(\frac{\theta}{2}))^{-1}$?

4. En déduire que $(s_n)^{-1} = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ et $(t_n)^{-1} = 2^n \tan(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.
5. Montrer que $2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})$ converge vers θ . Donner une estimation de l'erreur $|2^n \sin(\frac{\theta}{2^n}) - \theta|$.

On obtient une méthode qui ajoute 4 décimales à chaque itération. Mais on peut faire beaucoup mieux.

1.2 Formules de Leinitz et de Machin

1. Donner le développement en série entière de $\frac{1}{1+x^2}$. Quel est son rayon de convergence ? En déduire la série entière de $\arctan(x)$.

2. Écrire une fonction qui calcule la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Observer que cette somme converge vers $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. À quelle vitesse ?

3. Écrire une fonction qui calcule la somme

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)}.$$

Observer que cette somme converge vers $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$. À quelle vitesse ?

4. On dispose de la formule de Machin

$$\arctan(1) = 4 \times \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Proposer une nouvelle somme M_n qui permette de calculer π et la calculer avec l'ordinateur

1.3 Formule de Bailey-Borwein-Plouffe

On dispose également la formule suivante

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

qui peut être utilisé pour calculer le N -ième chiffre après la virgule de π en écriture binaire sans avoir à calculer les chiffres précédents.

1.4 Formule de Brent Salamin

On considère la suite $a_0 = 1, b_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$$

alors

$$\pi_n = \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum_{k=0}^n 2^k c_k} \rightarrow \pi$$

Cette convergence a la particularité de doubler le nombre de décimal correcte à chaque itération.