TP L3, Méthode de Newton

21 mars 2025

1 Méthode de Newton

Le but de la méthode de Newton est de résoudre l'équation $f(x) = 0$. Pour cela on définit la suite suivante

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \tag{1}$$

et sous certaines conditions on a $\lim_{n\to\infty} u_n = x$. L'intéret de cette méthode est que lorsque celle fonctionne, la convergence est extrèmement rapide : On double le nombre de décimale à chaque itération (convergence quadratique).

1. Écrire une fonction Newton(u0,f,df,n) qui calcule les n premiers éléments de la suite (1).
2. Pour chacun des réels suivants : proposer une fonction f telle que $f(x) = 0$, coder cette fonction et sa dérivée dans python, et appliquer la méthode de Newton.
   (a) $x_1 = \sqrt{5}$
   (b) $x_2 = \sqrt[3]{7}$
   (c) x_3 la plus grande racine du polynome $P = X^4 - 2X - 2$
   (d) $x_4 = \ln 2$ (on peut utiliser la fonction exp)
3. Pour chacun des cas précédents tracer les graphiques et observer les convergences
   (a) $(n, |u_n - x|)$
   (b) $(n, \ln |u_n - x|)$
   (c) $(\ln n, \ln \ln |u_n - x|)$
4. On suppose $f \in \mathcal{C}^2$, $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$. Donner un développement limité de f autour de x.
5. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|u_{n+1} - x| \leq C|u_n - x|^2.$$

6. Que donne cette borne si $C = 1$ et $|u_n - x| = 10^{-1}$? $|u_n - x| = 10^{-3}$? $|u_n - x| = 10^{-10}$?

2 Méthode de Newton modifiée

1. La méthode de Newton n'est pas aussi efficace lorsque $f'(x) = 0$. Essayer la sur la fonction $f(y) = (y-1)^2$ et tracer les même graphes que précédement.
2. On suppose $f \in \mathcal{C}^2$, $f(x) = f'(x) = 0$ et $f''(x) \neq 0$. Donner un développement limité au premier ordre non nulle pour
   (a) $f(y)$ pour y autour de x
   (b) $f'(y)$ pour y autour de x
   (c) Et en déduire que $y - x \sim_{y \to x} 2\frac{f(y)}{f'(y)}$.
3. Proposer une modification de la méthode de Newton pour traiter ce cas ci et la tester.

3 Méthode de la sécante

Un soucis avec la méthode de Newton est la nécéssité de calculer la dérivée de fonction. Pour contourner cette étape, une solution possible est d'approximer la dérivée par l'accroissement de fonction

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R}, \quad d_n = \frac{f(u_n) - f(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{d_n}. \tag{2}$$

1. Écrire une fonction Secante(u0,u1,f,n) qui calcule les n premiers éléments de la suite (2).
2. Tester cette fonction sur les fonctions précédentes. On pourra vérifier si celle ci fonctionne et comparer avec la méthode de Newton.