CC1, L3 mathématique pour l'enseignement.

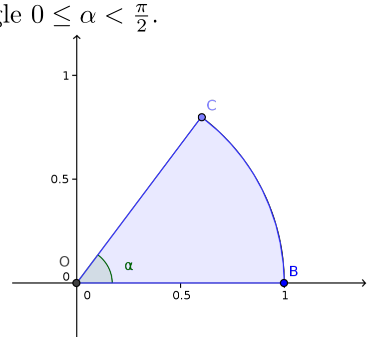
28 février 2025

Les parties numériques (I) sont à faire sur Jupyter et il faudra déposer le code sur Tomuss. Les parties mathématiques (M) sont à rédiger sur une feuille à part à rendre à la fin de l'examen. On portera une attention particulière à la clareté et à la mise en page du code et des preuves rédigées. Durée : 1h30.

Exercice 1. On lance deux dés équilibrés D1 et D2. Le but de l'exercice est d'estimer la probabilité conditionnelle que D1=6 sachant que D1+D2≥10.

1. (I) Écrire une fonction Lancer_Des(n) qui simule le lancer de 2 dés et répète l'expérience n fois. On enregistrera les valeurs dans un tableau de taille $2 \times n$.
2. (I) Écrire une fonction qui donne trois valeurs : le nombre de fois que D1=6, le nombre de fois que D1+D2≥10 et le nombre de fois que l'on ait à la fois D1=6 et D1+D2≥10.
3. (M) Rappeler la formule de l'espérance conditionnelle.
4. (I) Écrire une fonction Esp_Con_De(n) qui donne une estimation de l'espérance conditionnelle en répétant n lancés de dé. On donnera une valeur pour $n = 10000$.
5. (M) Avec un tableau des probabilités, calculer la probabilité conditionnelle. Est ce cohérant avec les résultats numériques.

Exercice 2. Le but de l'exercice est d'estimer la surface d'une part de pizza de rayon 1 et d'angle $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.



1. (M) Donner les coordonnées du point C de coupure de la pizza et en déduire l'équation de la droite (OC) délimitant la part de la pizza.

2. (M) Soit $(x, y) \in [0,1]^2$. À quelle condition a-t-on que le point (x, y) appartient à la part de la pizza ?
3. (I) Écrire une fonction Monte_Carlo_Pizza(n) pour estimer la surface de la pizza avec la méthode Monte Carlo en tirant n points aléatoire. On donnera une valeur pour $n \in \{100, 10000\}$ et $\alpha \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\}$.
4. (M) Donner une fonction f définie sur $[0, x_C] \to \mathbb{R}$ tel que le graphe $(x, f(x))_{x \in [0,x_C]}$ répresente la coupure de la pizza $[OC]$. Donner une fonction g définie sur $[x_C, 1] \to \mathbb{R}$ tel que le graphe $(x, g(x))$ répresente le bord de la pizza donné par l'arc de cercle (CB). On notera la fonction

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, x_C] \\ g(x) & \text{si } x \in]x_C, 1] \end{cases}$$

5. (I) Calculer intégrale $\int_0^1 h(t)dt$ avec la méthode des trapèzes(n) où n est le nombre de coupures de l'intervale $[0, 1]$. On donnera la valeur pour $n \in \{100, 10000\}$ et $\alpha \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\}$.
6. (M) Donner l'aire de la part pizza. Les résultats précédents sont-ils cohérents ?

Exercice 3. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$$

1. On commencera par supposer seulement $\alpha \neq 1$,
   (a) (M)Pour quel $u_0 \in \mathbb{R}$ a-t-on $u_1 = u_0$? Que vaut u_n dans ce cas ?
   (b) (M) On note $u_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$ et on pose $v_n = u_n - u_*$. Donner une relation calculant v_{n+1} à partir de v_n.
   (c) (M) Calculer $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de u_0, α, β. En déduire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
   (d) (M) Pour quels α la suite (u_n) converge-t-elle ?
2. Pour la suite on choisit $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 1$, $u_0 = 0$
   (a) (I) Écrire une fonction Suite_U(n) qui calcul les n premiers éléments de la suite et le renvoie sous la forme d'un tableau.
   (b) (I) Tracer les 20 premiers éléments de la suite dans un graphique.
   (c) (I) Même questions pour la suite $\ell_n = \log |u_n - u_*|$.
   (d) (I) Donner une approximation ℓ_n par une suite affine $a_n = an + b$. On calculera numériquement a et b.
   (e) (M) Justifier mathématiquement la question précédente.
3. Soit f la fonction

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 1 + \frac{1}{30}(x-3)^2$$

et la suite w_n défini par

$$w_0 = 0, \quad \text{et} \quad w_{n+1} = f(w_n)$$

(a) (M) Montrer que f est croissante sur $[0, 6]$.

(b) (M) En déduire que w_n est une suite monotone croissante.

(c) (M) Montrer que pour tout n, $w_n \leq 3$. On pourra utiliser que $f(3) = 3$.

(d) (M) Montrer que pour tout n, $u_n \leq w_n$ (avec $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 1$, $u_0 = 0$).

(e) (M) En déduire que $w_n \to 3$.

(f) (I) Écrire une fonction Suite_W(n) qui calcul les n premiers éléments de la suite et le renvoie sous la forme d'un tableau.

(g) (I) Tracer les 20 premiers éléments de la suite w_n et u_n dans un graphique. Est-ce cohérent avec les questions précédentes ?

(h) (I) Même questions pour la suite $\ell_n = \ln |u_n - u_*|$ et $\kappa_n = \ln |w_n - 3|$. Qu'observez vous ?

(i) (M) Commenter le dernier graphique.