TP, L3 Autour des Équations Différentielles

February 28, 2025

Le but est de résoudre des équations différentielles de la forme

$$y(0) = y_0, \quad y'(t) = f(t, y(t))$$

avec f défini sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Le Théorème de Cauchy Lipschitz affirme que si f est suffisament lisse il y a existence et unicité de la solution. Le but de l'analyse numérique est de calculer une solution approchée à cette équation.

1 Schéma d'Euler

Definition 1. (Schéma d'Euler Explicite) : On discrétise l'intervale $[0, T]$ en petits pas de temps h: $t_k = kh$ pour $0 \leq k \leq N = \lfloor \frac{T}{h} \rfloor$. Et on construit la suite

$$y_0 = y_0, \quad y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

Definition 2. (Schéma d'Euler Implicite) Même construction mais avec

$$y_0 = y_0, \quad y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_{k+1})$$

La différence ici est que la fonction f est évaluer en y_{k+1} et non en y_k.

1. Écrire deux fonction Euler_Explicite(y0,f,h,T) et Euler_Implicite(y0,f,h,T) qui réalise cette construction. Pour Euler Implicite on pourra utiliser la fonction scipy.optimize.fsolve.

1.1 Équations différentielles d'ordre 1

1. On va chercher à résoudre l'équation sur $[0, T = 5]$

$$y(0) = 1, \quad y' = y$$

   (a) Rappeler la solution mathématique de cette équation

   (b) Appliquer le Schéma d'Euler Explicite pour différente valeur de $N \in \{4, 20, 500, 5000\}$.

   (c) Tracer les résultats obtenus dans un même graphique. On ajoutera également la solution théorique pour comparer les résultats.

(d) Calculer mathématiquement les valeurs de la suite y_k (qui satisfait donc $y_{k+1} = y_k + hy_k$).

2. Faire la même chose que la question précédente pour le schéma d'Euler Implicite.

3. Étudier maintenant, mathématiquement et numériquement, l'équation

$$y(0) = y_0, \quad y' = \sqrt{y}$$

pour différentes valeur $y_0 \in \{1, 0.1, 10^{-3}, 10^{-10}, 0\}$.

4. Étudier maintenant, mathématiquement et numériquement, l'équation

$$y(0) = 1, \quad y' = y^2$$

1.2 Équations différentielles d'ordre 2

En dynamique on ne connait souvent que l'accélération : Le problème est le suivant

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0, \quad y''(t) = f(t, y(t))$$

Le schéma d'Euler (explicite) est alors de construire une suite (y_k, v_k) pour la position et la vitesse et

$$\begin{cases} y_{k+1} &= y_k + hv_k \\ v_{k+1} &= v_k + hf(y_k) \end{cases}$$

1. Réaliser ce schéma d'Euler et l'appliquer pour modéliser un oscillateur harmonique

$$f(y(t)) = -\omega^2 y(t)$$

On pourra prendre $\omega = 1$ et réaliser la simulation numérique pour différentes valeurs de N et T.

2. Tracer les résultats dans un graphique et les comparer avec la solution théorique.

3. Même chose pour le pendule

$$f(y(t)) = -\omega^2 \sin(y(t))$$

On pourra ensuite comparer les comportement du pendule et de l'oscillateur harmonique.

2 Schéma de Runge Kutta

2.1 Runge Kutta d'ordre 2

L'équation

$$y(0) = y_0, \quad y'(t) = f(t, y(t))$$

peut se réécrire comme

$$y(t) - y_0 = \int_0^t f(s, y(s))ds$$

Si on compare avec le TP précédent : la méthode d'Euler explicite correspond à la méthode Rectangle à gauche pour estimer l'intégrale et la méthode Euler implicite correspond à la méthode Rectangle à droite. On peut proposer une méthode qui correspond à la méthode des trapèzes :

Definition 3. (Runge Kutta d'ordre 2) Avec h, t_k comme dans Euler mais avec la relation de récurrence

$$\begin{cases} \widehat{y}_{k+1} = y_k + h \times \frac{f(t_k, y_k)}{2} & \text{(une valeur intermédiaire donné Euler)} \\ y_{k+1} = y_k + h \times \frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \widehat{y}_{k+1})}{2} & \text{(la vrai nouvelle valeur, avec le trapèze)} \end{cases}$$

1. Même en place ce shéma et l'éssayer sur les même fonctions que précédement

2.2 Runge Kutta d'ordre 4

Pour un schéma correspondant à la méthode de Simpson :

$$\begin{cases} \delta_1 = f(t_k, y_k) \\ \delta_2 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}h\delta_1) \\ \delta_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}h\delta_2) \\ \delta_4 = f(t_k + h, y_k + h\delta_3) \end{cases}$$

et

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \times (\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 + \delta_4)$$

1. Même en place ce shéma et l'éssayer sur les même fonctions que précédement