
TD-TP 3

Méthodes de quadrature

---

1 Rappels théoriques

L'intégrale I d'une fonction f entre a et b peut être approchée en utilisant une approche naïve (mais efficace) de l'intégrale. Le principe est de découper l'intervalle $[a,b]$ en n sous intervalles réguliers en posant $h=(b-a)/n$ et $x_i = a+ih$ pour $i \in [\![0,n]\!]$, puis d'utiliser des formules simples d'intégration sur ces sous intervalles et de sommer les résultats obtenus.

Une formule de quadrature s'écrit

$$I_n = \sum_{0\leq i\leq n} \omega_i f(x_i)$$

où les ω_i sont les poids de la formule de quadrature. On espère que pour n assez grand, I_n est proche de $\int_a^b f(x)dx$.

Remarque 1. On considère ici des formules de quadrature *composites* dites *de Newton-Côtes*, mais il en existe bien d'autres, notamment en considérant des points non équidistants.

Définition 2. On dit qu'une formule de quadrature $\sum_{0\leq i\leq n} \omega_i f(x_i)$ est d'ordre p si la formule est exacte pour tout polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$. et si elle n'est pas exacte pour au moins un polynôme de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$.

Les formules correspondant à quelques unes de ces méthodes sont les suivantes :

— Rectangles à gauche :

$$I_n = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

— Rectangles à droite :

$$I_n = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

— Point milieu :

$$I_n = h\sum_{i=0}^{n-1} f\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\Big)$$

— Trapèzes :

$$I_n = h\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

— Simpson :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \;+\; 4f\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\Big) \;+ f(x_{i+1}) \\ &= \frac{h}{3}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\Big)\right) \end{aligned}$$

Théorème 3. *Pour ces formules de quadrature, on a les résultats suivants.*

— *Les formules des rectangles à gauche et à droite sont d'ordre 0, et on a la majoration de l'erreur d'intégration suivante :*

$$\exists C > 0, \forall f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}), \quad \left| \int_a^b f(x)dx - I_n \right| \leq Ch \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

— *La formule du point milieu et des trapèzes sont d'ordre 1, et on a la majoration de l'erreur d'intégration suivante :*

$$\exists C > 0, \forall f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}), \quad \left| \int_a^b f(x)dx - I_n \right| \leq Ch^2 \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

— *La formule de Simpson est d'ordre 3, et on a la majoration de l'erreur d'intégration suivante :*

$$\exists C > 0, \forall f \in \mathcal{C}^4([a,b],\mathbb{R}), \quad \left| \int_a^b f(x)dx - I_n \right| \leq Ch^4 \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

2 Test des différentes méthodes de quadrature

1. Pour chacune des approches ci-dessus, écrire une fonction qui calcule l'intégrale d'une fonction f entre a et b.
2. Tester les fonctions avec $a = 0$, $b = \pi/2$, $n = 100$, $h = (b-a)/n$ et $f(x) = \sin(x)$. Quelle est la méthode la plus précise ?
3. Entrer la commande `import scipy.integrate as integ` et tester la fonction `integ.quad` en allant voir l'aide.

3 Ordre des méthodes

On souhaite vérifier numériquement l'ordre de chacune des méthodes. Pour cela, on considère $a = 0$, $b = 1$, $n = 1$, et on calcule successivement l'approximation numérique de intégrale sur $[0,1]$ des fonctions suivantes $f_0 = 1$, $f_1 = x$, $f_2 = x^2$, $f_3 = x^3$ et $f_4 = x^4$.

1. Calculer algébriquement les intégrales suivantes : $I_0 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$, $I_1 = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$, $I_3 = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$ et $I_4 = \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$.
2. Définir les fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4 en utilisant la commande `def`.
3. Comment peut-on mettre en évidence l'ordre des formules d'intégration approchée à partir de leur évaluation pour f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4 ? Vérifier que c'est bien le cas.

4 Convergence des méthodes

1. Illustrer le théorème **??** graphiquement.
2. Vérifier les vitesse de convergence obtenues en utilisant la commande `np.polyfit` pour les différentes méthodes de quadrature et comparer avec les valeurs théoriques.