Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
L3 Mathématiques pour l'enseignement
Examen. Mai 2025

Séries et intégrales

La durée de totale de l'epreuve est de 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Question de cours.

1. Soit $R > 0$ et $f\colon]-R, R[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Préciser des hypothèses sur les dérivées de f assurant que la fonction f soit développable en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$.
2. Démontrer l'affirmation du point précédent.

Exercice 1. Donner la solution générale de l'équation différentielle $y''(x) - 4y(x) = 4e^{-2x}$. Trouver ensuite l'unique solution vérifiant $y(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3. Calculer la somme $S(x)$ de la série entière suivante, après avoir déterminé le rayon de convergence.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\big(4 + (-1)^n\big)^n}\,.$$

Exercice 4. On pose, pour $n \geq 2$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n(t) = \frac{te^{-nt}}{\log(n)}.$$

1. Préciser le domaine de simple convergence de la série de fonctions $\sum f_n(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ où la série converge, on pose ensuite $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$.
2. Calculer, pour $x > 2$, $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t\log(t)}\,\mathrm{d}t$. Quelle est la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\log(t)}\,\mathrm{d}t$?
3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\log n}$? La série de fonctions $\sum f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $]0, +\infty[$?
4. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur tout intervalle $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$.
5. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n'(x)$ converge normalement sur tout intervalle $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$.
6. La fonction F est-elle continue sur $]0, +\infty[$? Est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?