Séries et intégrales. Examen de session 1. Avril 2024

La durée de totale de l'epreuve est 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. (Question de cours). Énoncer et démontrer le théorème de Heine sur la continuité uniforme.
2. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t\sin(1/t)$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle uniformément continue sur $[-1, 1]$? Et sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

1. (Question de cours). Spécifier une hypothèse supplémentaire sur f, assurant que F soit continue
2. Construire un exemple d'une fonction f illustrant qu'en l'absence de l'hypothèse précédente, F peut être discontinue.
   (On pourra poser $f(x,t) = x\phi(xt)$, où $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bien choisie)

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^2 e^{-\sqrt{n}x}, \qquad x \in [0, +\infty[.$$

1. Soit $a > 0$. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$:
   i) simple, sur $[0, +\infty[$, ii) normale, sur $[a, +\infty[$, iii) normale, sur $[0, a]$
   .
2. On pose, pour $x \in [0, +\infty[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. La fonction S est-elle continue en 0 ?
   (*On pourra considérer $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ et minorer $S(\epsilon)$ par une somme partielle comportant $\approx \frac{1}{\epsilon^2}$ termes).*

Exercice 4. On se propose d'étudier le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) - tu'(t) + 4u(t) = 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{P}$$

1. On cherche les solutions de (P) développables en série entière, de la forme $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.
   i) Que peut-on dire de a_0 et de a_1 ?
   ii) Trouver la relation de récurrence que les coefficients a_n doivent satisfaire.
   iii) Calculer a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.
   (Vérifiez vos calculs : il faut trouver $a_6 = 0$).
2. En déduire que la solution obtenue au point précédent est polynôme, que l'on explicitera.
3. Peut-on trouver d'autres solutions du problème (P), non développables en série entière ?