

Séries et intégrales. Examen de session 2. Juin 2024

La durée de totale de l'épreuve est 1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

$$(i) \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t^{3/2}} \right| dt, \quad (ii) \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt, \quad (iii) \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$. Écrire le développement en série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \frac{1}{\alpha^2 + x^2}.$$

Préciser le rayon de convergence du développement obtenu.

Exercice 3. On se propose d'étudier le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) - tu'(t) + 5u(t) = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (P)$$

- On cherche les solutions de (P) développables en série entière, de la forme $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.
 - Que peut-on dire de a_0 et de a_1 ?
 - Trouver la relation de récurrence que les coefficients a_n doivent satisfaire.
 - Calculer a_2, a_3, a_4, a_5 .
- En déduire que la solution obtenue au point précédent est polynôme, que l'on explicitera.

Question de cours. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

- Définir les notions suivantes :
 - La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$.
 - La série $\sum f_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$.
 - La série $\sum f_n$ converge normalement dans $(E, \|\cdot\|)$.
- Démontrer l'affirmation suivante :

Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente.