

FEUILLE DE TD 5

Convergence en probabilité, presque sûre, Lemmes de Borel-Cantelli,
Loi des grands nombres

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Exercice 1. Lemme de Borel-Cantelli - Convergence p.s.

On rappelle que si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, alors

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Soit X_n , $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires réelles. La suite X_n converge presque sûrement (p.s. ou $\mathbf{P}$ -p.s.) vers une v.a. X si

$$\mathbf{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega; X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega) \right\} \right) = 1.$$

1. Montrer que si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, les deux événements $\limsup_n A_n$ et $\{\text{une infinité des } A_n \text{ est réalisée}\}$ sont égaux.
2. Supposons que les v.a. X_n , $n \geq 1$ sont indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0).$$

(a) Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 si et seulement si $p_n \rightarrow 0$.

(b) Montrer que

$$\left\{ X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right\} = \left(\limsup_n \{X_n = 1\} \right)^c.$$

(c) Montrer que X_n converge p.s. vers 0 si et seulement si $\sum_n p_n < \infty$.

3. Montrer que $X_n \rightarrow +\infty$ p.s. si et seulement si

$$\forall M > 0, \mathbf{P}(\limsup_n \{X_n < M\}) = 0.$$

Exercice 2.

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, on définit les événements $A_n = \{U \leq \frac{1}{n}\}$.

1. Calculer $\mathbf{P}(A_n)$ et déterminer l'ensemble $\limsup_n A_n$.
2. En déduire un contre-exemple du second lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 3. Loi des grands nombres

Déterminer, sans calcul, les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0, 1]$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour f une fonction continue sur $[0, 1]$ et $p \in [0, 1]$.

Exercice 4.

Montrer que, dans une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie identique non biaisée, la séquence PFP (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. À l'aide de la loi faible des grands nombres, donner la fréquence d'apparition de cette séquence (on pourra rassembler les variables en paquets de variables indépendantes).

Exercice 5.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles. On suppose que X_n converge en probabilité vers X , et Y_n converge en probabilité vers Y .

1. Montrer que si de plus

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y,$$

alors $X = Y$ $\mathbf{P}$ -p.s.

2. Montrer que

$$X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \pm Y.$$

3. (*) Montrer que

$$X_n Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} XY.$$

Exercice 6. (*) LGN faible pour une suite de v.a. dépendantes

Étant donné une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, supposons que

$$\mathbf{E}[X_n] = 0 \text{ et } \mathbf{E}[X_n X_m] = f(n - m), \forall 1 \leq m \leq n,$$

où $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée telle que $f(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Montrer que

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Exercice 7. Loi des grands nombres et Borel-Cantelli

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives, i.i.d.

1. Si $0 < \mathbf{E}[X_1] < \infty$, montrer que $\mathbf{P}$ -p.s.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty.$$

2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbf{E}[X_1] < \infty \iff \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(X_n \geq \alpha n) < \infty.$$

En déduire que $\mathbf{P}$ -p.s.,

$$\limsup_n \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{E}[X_1] < \infty. \\ \infty & \text{si } \mathbf{E}[X_1] = \infty. \end{cases}$$

Exercice 8. (*)

Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que p.s.,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} = 1.$$

2. On pose $Z_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\log n}$ pour tout $n \geq 2$, montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \geq 1, \text{ p.s.}$$

3. (*) Montrer que pour une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k \rightarrow \infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 1, \text{ p.s.}$$

Exercice 9.

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables iid de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner la loi de $X_1 + \dots + X_n$.
2. Déterminer sans calcul $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.