Examen, 5 Mai 2025, durée 2h

Les téléphones, les objets connectés et les documents sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées et la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Une loi peut être donnée par la mesure-image, les probas atomiques ou la densité.

Attention!! Rendez les 2 parties dans deux copies séparées: chacune est corrigée par un correcteur différent !!

PARTIE 1

Exercice 1. — Une poète immortelle

Une poète immortelle écrit chaque jour $n \in \{1, 2, \ldots\}$ un nouveau poème (qu'elle intitule par soucis de classification efficace a_n). Chaque nuit $n \in \{1, 2, \ldots, \}$ elle relit un poème choisi uniformément au hasard parmi les poèmes qu'elle a écrits; tous les choix sont indépendants. (Par exemple, au cours de la troisième nuit $n = 3$, elle relit un poème choisi uniformément au hasard dans son recueil $\{a_1, a_2, a_3\}$, et ce indépendamment des relectures passées).

1. Quelle est la probabilité que la poète relise son premier poème a_1 une infinité de fois ?
2. Quelle est la probabilité que la poète relise chaque poème une infinité de fois ?
3. (*) Prime aux poèmes plus recents. Même contexte mais avec un poète à la mémoire plus courte: il écrit chaque jour un poème b_n et chaque nuit $n \geq 1$, il choisi de relire le poème b_k, $1 \leq k \leq n$ avec probabilité $2 * \frac{k}{n(n+1)}$. Les probabilités sont-elles bien ajustées ? Est-ce que cette prime aux poèmes plus récents change la donne sur la relecture une infinité de fois du poème b_1, des poèmes $b_k, k \geq 2$?

Exercice 2. — Une suite de variables aléatoires

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x) n^2 x \exp(-n^2 x^2/2).$$

1. Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \geq 1$, X_n admet pour densité f_n. Démontrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0.
3. Converge-t-elle dans l'espace L^2 ? *On rappelle qu'une suite de variables aléatoires* (Y_n) *converge vers* Z *dans* L^2 *si* $\lim_{n\to\infty} E[(Y_n - Z)^2] = 0$.
4. Notons $Y_n := nX_n$. Pour chaque $n \geq 1$, calculer la fonction de répartition de la variable Y_n.
5. Est-ce que la suite $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ converge en loi ? Si oui, identifier la loi limite par sa densité.

Exercice 3. —

Soit X un variable aléatoire de loi $P_X(dx) = \alpha e^{-|x|} dx$.

1. Calculer α
2. Donner l'espace d'arrivée de la variable $Y = X^2$ et déterminer sa loi.
3. Soit Z une variable aléatoire ayant même loi que X et indépendante de X. Expliciter la loi du couple (Y, Z).

PARTIE 2 (!! Rappel : sur une copie différente !!)

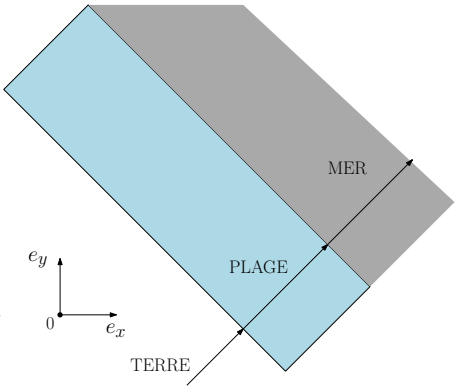
Exercice 4. — Distances à l'origine

On considère le disque Euclidien B_R dans $\mathbb{R}^2$ de rayon $R > 0$. C.a.d $B_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. On considère U un point choisi uniformément dans le disque B_R.

1. Quelle est la loi de U ? (On s'attend ici à une densité sur $\mathbb{R}^2$, on rappelle à tout hasard que l'aire d'un disque de rayon 1 est π).
2. Donner la loi de $\|U\|_2$? (On pourra utiliser le changement de variables en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$).
3. Calculer $\mathbb{E}[\|U\|_2]$.
4. On note les coordonnées de U dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, X et Y, c.a.d $U = (X, Y)$. Calculer la loi de X.
5. Calculer $\mathbb{E}[|X|]$.
6. En déduire $\mathbb{E}[\|U\|_1]$. Comparer votre résultat avec celui de la question 3 et justifier ce que vous observez.

Exercice 5. — Une histoire de drones

Trois drones D_1, D_2 et D_3 se déplacent sur le plan $\mathbb{R}^2$ paramètré par le repère centré en 0 et avec base $e_x = (1, 0)$ $e_y = (0, 1)$ (voir dessin). **L'unité de mesure du repère est le mètre.** Ils partent tous les trois de l'origine 0 situé sur le littoral ("terre"). Une plage est à proximité, modélisée ici par un rectangle infini orienté à 45^o, de largeur 4km et située à distance Euclidienne 1km de l'origine (i.e. le grain de sable le plus proche de l'origine est à 1km au point $(\frac{1000}{\sqrt{2}}, \frac{1000}{\sqrt{2}})$). Après la plage, on trouve une mer modélisée par un demi-plan incliné de 45^o et située à 5km de l'origine. Les 3 drones se déplacent aléatoirement avec des pas i.i.d de mesures respectives:



$$\mu_1 = \text{Loi du vecteur Gaussien centré de matrice de covariance } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 := \frac{1}{4}\delta_{(2,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(-2,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,-1)}$$

$$\mu_3 = \frac{49}{100}\delta_{(1,0)} + \frac{49}{100}\delta_{(-1,0)} + \frac{2}{100}\delta_{(0,1)}$$

Le drone D_1 se trouve au temps n en $D_1(n) = X_1 + \ldots + X_n \in \mathbb{R}^2$, D_2 est en $D_2(n) = Y_1 + \ldots + Y_n \in \mathbb{R}^2$ et D_3 est en $D_3(n) = Z_1 + \ldots + Z_n$ ou les pas sont indépendants et de loi μ_1, μ_2, μ_3.

1. Rappeler brièvement quel est l'énoncé du TCL dans $\mathbb{R}^2$
2. L'appliquer aux positions $D_1(n), D_2(n), D_3(n)$ quand $n \to \infty$

La batterie des drones meurt au temps $N = 10^6$. On veut savoir qui a le plus de chance de tomber dans l'eau. Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de norme euclidienne 1m et de coordonnés $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ et soient $P_1(n) := \langle u, D_1(n)\rangle$ (resp $P_2(n) := \langle u, D_2(n)\rangle$, $P_3(n) := \langle u, D_3(n)\rangle$).

3. En quoi les processus $n \mapsto P_k(n), k \in \{1, 2, 3\}$ sont-ils pertinents pour notre problème ?
4. Rappeler brièvement la loi des grands nombres et appliquer la à chacun de ces 3 processus.
5. Appliquer le TCL dans $\mathbb{R}$ à chacun de ces 3 processus.
6. Si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ et si $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, montrer que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}\big[X > a\big] \leq \mathbb{P}\big[Y > a\big]$. (Indication : on pourra trouver λ tel que $\lambda * X$ a même loi que Y et conclure).
7. Conclure : quitte à faire quelques approximations (que l'on justifiera), quel est selon vous le drone qui a la plus forte probabilité de tomber dans la mer ? Celui qui a la plus forte probabilité de tomber dans le sable ?