Université Claude Bernard
Année universitaire 2024 – 2025

Licence de Mathématiques
PROBABILITÉS

Contrôle Partiel du 12 mars 2025 - Durée : 2 heures

- *Les téléphones et les objets connectés ainsi que les documents sont interdits.*
- *Les exercices sont indépendants entre eux, mais dans un même exercice, les questions ne le sont pas : pensez à utiliser les questions précédentes.*
- *Il est possible d'admettre certaines questions pour traiter les suivantes.*
- *Attention aux justifications : une bonne réponse mal justifiée ne vaut pas grand chose...*

Rendez les 2 parties dans la copie séparées : chacune est corrigée par un correcteur différent.

PARTIE 1

Exercice 1 – Questions de cours

1. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de densité f_X.
   a) Quelle(s) propriété(s) doit satisfaire f_X ?
   Correction : La fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doit être mesurable, positive et telle que, pour tout borélien B de $\mathbb{R}$,
   $$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)dx.$$
   En particulier, $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$.
   b) Donner, sous la forme d'une probabilité, et sous la forme d'une intégrale, les expressions de la fonction de répartition de X.
   Correction : La fonction de répartition de X, notée F_X est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
   $$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

2. Définir une suite d'événements mutuellement indépendants.
   Correction : On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements indépendants si, pour tout sous-ensemble $I \subset \mathbb{N}$ non vide, on a
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

3. Enoncer le théorème de transfert.
   Correction : Soit X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ une fonction mesurable, alors
   $$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbb{P}_X(dx),$$
   où P_X est la mesure image de $\mathbb{P}$ par la variable aléatoire X.

4. Donner la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variable aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X.
Correction : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Exercice 2 – Loi de couple et indépendance

Soit λ un réel strictement positif. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{0\le x\le y}$$

et on admet que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

On considère un couple (X,Y) de variables aléatoires dont la loi est donnée par

$$d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) = f(x,y)\ dx\ dy.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \ge 0) = 1$. On admet que l'on a aussi $\mathbb{P}(Y \ge 0) = 1$.
Correction : X et Y sont des variables aléatoires à valeurs positives : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$. On a en effet

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \le 0) &= \mathbb{P}(X \le 0, Y \in \mathbb{R}) \\ &= \int_{x\le 0}\int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\ dx\ dy \\ &= 0\end{aligned}$$

car $f(x,y)$ est nul pour tout x strictement négatif.
En passant au complémentaire, on obtient que $\mathbb{P}(X \ge 0) = 1$.
De même, $\mathbb{P}(Y \ge 0) = 1$.

2. Montrer que X suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.
Correction : On calcule la densité de la loi de X : le couple (X,Y) est de densité f, donc X admet une densité, que l'on note g_X et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x est strictement négatif, alors, pour tout réel y, $f(x,y) = 0$, donc $g_X(x) = 0$.
Supposons $x \ge 0$. On a

$$\begin{aligned}g_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\ dy &= \int_{y\in\mathbb{R}} \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{0\le x\le y}\ dy \\ &= \int_{y=x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y}\ dy \\ &= \lambda e^{-\lambda x}.\end{aligned}$$

X est donc de densité $g_X : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x\ge 0}$. On reconnaît la densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

3. Déterminer la densité de la loi de Y.
Correction : De même, (X,Y) est de densité f donc Y est de densité notée g_Y avec

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx.$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. Si y est strictement négatif, alors, pour tout réel x, $f(x,y) = 0$, donc $g_Y(y) = 0$.
Soit $y \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\begin{aligned} g_Y(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\ dx &= \int_{x\in\mathbb{R}} \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{0\leq x\leq y}\ dx \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda y}\int_0^y\ dx \\ &= \lambda^2 y e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

La densité de la loi de Y est donc $y \mapsto \lambda^2\, y\, e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{y\geq 0}$.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
Correction : On constate que $\mathbb{P}(X \geq 2) > 0$, $\mathbb{P}(Y \leq 1) > 0$ mais

$$\mathbb{P}(X \geq 2, Y \leq 1) = \int_2^{+\infty}\int_0^1 f(x,y)\ dx\ dy = 0$$

car f est nulle sur $[2,+\infty[\times[0,1]$.
Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Montrer que, pour tout réel α de $[1,+\infty[$, on a $\mathbb{P}(\alpha X \leq Y) = \dfrac{1}{\alpha}$.
Correction : Soit $\alpha \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\alpha X \leq Y) &= \iint_{\alpha x\leq y} \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{0\leq x\leq y}\ dx\ dy \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{\alpha x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{0\leq x\leq y}\ dy\right)\ dx \\ &= \int_0^{+\infty} \big[-\lambda e^{-\lambda y}\big]_{\alpha x}^{+\infty}\ dx \text{ car si } y \geq \alpha x \text{ alors } y \geq x \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda\alpha x}\ dx \\ &= \left[\frac{\lambda}{-\lambda\alpha}e^{-\lambda\alpha x}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

6. Montrer que, pour tout réel α de $[0,1]$, on a $\mathbb{P}(\alpha X \leq Y) = 1$.

Correction : Soit $\alpha \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\alpha X \leq Y) = \iint_{\alpha x \leq y} f(x, y)\, dx\, dy &= \iint_{\mathbb{R}^2} \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{0 \leq \alpha x \leq x \leq y}\, dx\, dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy \\ &= 1\end{aligned}$$

7. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X}{Y}$.

   Correction : Notons $Z = \frac{X}{Y}$. On a montré, dans les questions 5. et 6., comme $Y \geq 0$, que
   - Pour tout $\alpha \geq 1$, $\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$;
   - Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{\alpha}\right) = 1$.

   En effectuant le changement de variable $z = \dfrac{1}{\alpha}$ on obtient donc

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ t & \text{si } z \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

   ce qui permet de conclure, en dérivant F_Z sur $\mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$, que $Z = \frac{X}{Y}$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

PARTIE 2

Exercice 3 – Vrai ou Faux

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier brievement votre reponse.

1. Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors X et $Z = XY$ sont également indépendantes.

   Correction : C'est faux : si on prend par exemple deux variables indépendantes $X, Y \sim Ber(1/2)$, alors $Z = XY \sim Ber(1/4)$ et pourtant

$$\mathbb{P}(Z = 1 \text{ and } X = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(Z = 1)\mathbb{P}(X = 0) = 1/8.$$

2. Pour tous entiers positifs n and n', pour tout $p, p' \in [0, 1]$ si $X \sim Bin(n, p)$ et $Y \sim Bin(n', p')$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim Bin(n + n', p + p')$.

   Correction : C'est faux, et on peut s'en rendre compte sans faire de calcul : si $p = p' = 3/4$, $p + p' = 3/2 > 1$, et ne peut donc même pas être le paramètre d'une loi binomiale. Ce qui est vrai, c'est par contre que si $p = p'$ et X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \sim Bin(n + n', p)$.

3. Soit X une variable aléatoire réelle, alors sa fonction de répartition est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Correction : C'est faux : n'importe quelle variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ est une variable réelle, et pourtant n'est pas nécessairement dérivable sur $\mathbb{N}$. Par exemple, la fonction de répartition d'une variable $X \sim Ber(1/2)$ est donnée par

$$F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1/2 & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{pour } t > 1, \end{cases}$$

qui n'est pas dérivable en 0 et 1 puisqu'elle n'y est même pas continue.

Exercice 4 – Loi exponentielle et partie entière

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire telle que

$$\mathbb{P}_X(dx) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)dx.$$

1. On note $Y = \lfloor X \rfloor$ sa partie entière (inférieure), c'est à dire que $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$.
   a) Donner l'expression de F_X, la fonction de répartition de X.
   Correction : comme la densité de X est donnée par $f_X(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, sa fonction de répartition est donc donnée par

   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

   b) Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de Y si $X \in [k, k+1[$? En déduire une expression de $\mathbb{P}(Y = k)$ en fonction de F_X.
   Correction : par définition de Y, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $X \in [k, k+1[\Leftrightarrow Y = k$. En particulier

   $$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X \in [k, k+1[) = \int_{k}^{k+1} f_X(t)dt = F_X(k+1) - F_X(k)$$

   c) Montre que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

   Correction : on utilise les deux questions précedentes, et on obtient

   $$\mathbb{P}(Y = k) = e^{-k} - e^{-(k+1)} = e^{-k}(1 - e^{-1}) = p(1-p)^k,$$

   où $p = 1 - e^{-1}$. Y suit donc une loi géométrique de paramètre p.
2. On définit maintenant la variable aléatoire $Z = X - Y$.
   a) Dans quel ensemble Z prend-elle ses valeurs ?
   Correction : pour tout $k \in \mathbb{N}$, lorsque $X \in [k, k+1[$, on a $Y = k$, et donc $X - Y \in [0, 1[$. Dans tous les cas, on a donc $X - Y \in [0, 1[$.

b) Justifier que $(\{Y = k\})_{k\in\mathbb{N}}$ forment une partition de l'espace de probabilité.
Correction : comme X est à valeurs positives, $Y = \lfloor X \rfloor$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, et par conséquent $(\{Y = k\})_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de Ω.

c) En déduire que pour tout $t \in [0, 1)$

$$\mathbb{P}(Z \le t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(k \le X \le k + t).$$

Correction : pour $t \in [0, 1)$, et on écrit par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \le t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(Z \le t \text{ et } Y = k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X - Y \le t \text{ et } Y = k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X \le t + k \text{ et } Y = k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X \le t + k \text{ et } X \in [k, k + 1[) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(k \le X \le k + t).
\end{aligned}$$

d) Montrer que la fonction de répartition de Z est donnée par

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1 - e^{-t})/(1 - e^{-1}) & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{si } t \ge 1. \end{cases}$$

Correction : Comme Z prend ses valeurs dans $[0, 1]$, pour $t < 0$, on a $\mathbb{P}(Z \le t) = 0$. De même, pour $t \ge 1$, $\mathbb{P}(Z \le t) = 1$. On considère maintenant $t \in [0, 1)$, et on applique la formule précédente

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \le t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(k \le X \le k + t) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-k} - e^{-k+t} = (1 - e^{-t}) \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-k} \\
&= \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}.
\end{aligned}$$

e) En déduire que Z est à densité, et déterminer sa densité.
Correction : cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on peut donc écrire

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx.$$

La variable Z est à densité, et sa densité est donnée par $e^{-x}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)/(1 - e^{-1})$.

3. **Bonus :** Justifier l'indépendance de Y et Z.
Correction : On écrit, pour $t \in [0,1), k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \leq t, Y = k) &= \mathbb{P}(k \leq X \leq k+t) \\
&= e^{-k} - e^{-k-t} = e^{-k}(1 - e^{-t}) \\
&= (1 - 1/e)e^{-k}\frac{1 - e^{-t}}{1 - 1/e} \\
&= \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(Z \leq t).
\end{aligned}$$

Ces deux variables sont donc indépendantes.