# Correction de l'examen du 5 Mai 2025 (durée 2h)

**Exercice 1. — Une poète immortelle**

Une poète immortelle écrit chaque jour $n \in \{1, 2, \ldots\}$ un nouveau poème (qu'elle intitule par soucis de classification efficace $a_n$). Chaque nuit $n \in \{1, 2, \ldots, \}$ elle relit un poème choisi uniformément au hasard parmi les poèmes qu'elle a écrits; tous les choix sont indépendants. (Par exemple, au cours de la troisième nuit $n = 3$, elle relit un poème choisi uniformément au hasard dans son recueil $\{a_1, a_2, a_3\}$, et ce indépendamment des relectures passées).

1. Quelle est la probabilité que la poète relise son premier poème $a_1$ une infinité de fois ?
2. Quelle est la probabilité que la poète relise chaque poème une infinité de fois ?
3. (*) Prime aux poèmes plus recents. Même contexte mais avec un poète à la mémoire plus courte: il écrit chaque jour un poème $b_n$ et chaque nuit $n \geq 1$, il choisi de relire le poème $b_k$, $1 \leq k \leq n$ avec probabilité $2 * \frac{k}{n(n+1)}$. Les probabilités sont-elles bien ajustées ? Est-ce que cette prime aux poèmes plus récents change la donne sur la relecture une infinité de fois du poème $b_1$, des poèmes $b_k, k \geq 2$ ?

**Correction.**
1. Soit $A_n^1 := \{$la poete choisi le poème $a_1$ au temps $n$ $\}$. Les evenements $A_n^1$ sont independants. Par ailleurs $\sum \mathbb{P}\big[A_n^1\big]$ diverge. On conclue par Borel-Cantelli (en rappelant brièvement l'énoncé)
2. Même idée avec $A_n^k := \{$la poete choisi le poème $a_k$ au temps $n$ $\}$ pour tout $k \geq 1$ fixé (evenement bien défini seulement pour $n \geq k$).
3. En définissant les evenements $B_n^1$ de la meme facon que $A_n^1$ mais pour le poème $b_1$, on est maintenant en présence d'une série sommable. On peut donc utiliser l'autre Lemme de Borel-Cantelli qui ne nécessite pas l'indépendance entre les $B_n^1$ et qui nous permet de conclure que le poème $b_1$ finit par être oublié par son poète ... : (.

**Exercice 2. — Une suite de variables aléatoires**

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère la fonction $f_n$ définie par

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x) n^2 x \exp(-n^2 x^2/2).$$

1. Montrer que $f_n$ est la densité d'une variable aléatoire.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \geq 1$, $X_n$ admet pour densité $f_n$. Démontrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0.
3. Converge-t-elle dans l'espace $L^2$ ? *On rappelle qu'une suite de variables aléatoires* $(Y_n)$ *converge vers* $Z$ *dans* $L^2$ *si* $\lim_{n\to\infty} E[(Y_n - Z)^2] = 0$.
4. Notons $Y_n := nX_n$. Pour chaque $n \geq 1$, calculer la fonction de répartition de la variable $Y_n$.
5. Est-ce que la suite $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ converge en loi ? Si oui, identifier la loi limite par sa densité.

**Correction.**
1. $\int_0^\infty n^2 x \exp(-n^2x^2/2)dx = \int_0^\infty u \exp(-u^2/2)du = [-e^{-u^2/2}]_0^\infty = 1$.
2. $\mathbb{P}\big[|X_n - 0| > \epsilon\big] = \int_\epsilon^\infty n^2 x \exp(-n^2x^2/2)dx = \int_{n\epsilon}^\infty u \exp(-u^2/2)$ qui converge vers 0 quand $n \to \infty$ par convergence dominée.
3. Par la formule de transfert, $\mathbb{E}\big[|X_n - 0|^2\big] = \int_0^\infty x^2 n^2 x \exp(-n^2x^2/2)dx = \int_0^\infty \frac{1}{n^2} u^3 e^{-u^2/2}du = O(\frac{1}{n^2})$
4. et 5. $\mathbb{E}\big[f(Y_n)\big] = \mathbb{E}\big[f(nX_n)\big] = \int_0^\infty f(nx) n^2 x e^{-n^2x^2/2}dx = \int_0^\infty f(y) y e^{-y^2/2}dy$. Donc $Y_n$ a la meme loi quelque soit $n$ et converge donc vers la loi de densité $ye^{-y^2/2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 3. —**

Soit $X$ une variable aléatoire de loi $P_X(dx) = \alpha e^{-|x|}dx$.

1. Calculer $\alpha$
2. Donner l'espace d'arrivée de la variable $Y = X^2$ et déterminer sa loi.
3. Soit $Z$ une variable aléatoire ayant même loi que $X$ et indépendante de $X$. Expliciter la loi du couple $(Y, Z)$.

**Correction.**
1. $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-|x|} dx = 2\alpha \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2\alpha$. Il faut donc $\alpha = \frac{1}{2}$.
2. $\mathbb{E}\big[f(Y)\big] = \mathbb{E}\big[f(X^2)\big] = 2\alpha \int_0^{\infty} f(x^2) e^{-x} dx = \int_0^{\infty} f(y) e^{-\sqrt{y}} \frac{dy}{2\sqrt{y}}$. (Formule de transfert). $Y$ a donc une loi de densité $g(y) = e^{-\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. $(Y, Z)$ est un point aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de densité $1_{\mathbb{R}_+}(y) e^{-\sqrt{y}} \frac{dy}{2\sqrt{y}} * \frac{1}{2} e^{-|z|}$.

**Exercice 4. — Distances à l'origine**

On considère le disque Euclidien $B_R$ dans $\mathbb{R}^2$ de rayon $R > 0$. C.a.d $B_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. On considère $U$ un point choisi uniformément dans le disque $B_R$.

1. Quelle est la loi de $U$ ? (On s'attend ici à une densité sur $\mathbb{R}^2$, on rappelle à tout hasard que l'aire d'un disque de rayon 1 est $\pi$).
2. Donner la loi de $\|U\|_2$ ? (On pourra utiliser le changement de variables en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$).
3. Calculer $\mathbb{E}[\|U\|_2]$.
4. On note les coordonnées de $U$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $X$ et $Y$, c.a.d $U = (X, Y)$. Calculer la loi de $X$.
5. Calculer $\mathbb{E}[|X|]$.
6. En déduire $\mathbb{E}[\|U\|_1]$. Comparer votre résultat avec celui de la question 3 et justifier ce que vous observez.

**Correction.**
1. $U$ est de loi uniforme sur $B_R$ donc sa densité est constante sur $B_R$ et nulle en dehors de $B_R$. Comme son intégrale doit être égale à 1, on détermine la valeur de la constante. On obtient ainsi:

$$dP_U = \frac{1}{\pi R^2} \mathbf{1}_{x^2+y^2 \leq R^2} dx\ dy.$$

2. $\|U\|_2$ est une variable aléatoire à valeur dans $[0, R]$ et pour tout $t$ dans $[0, R]$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|U_2\| \leq t) &= \int_{\{} (x, y) \in B_t\} dP_U(dx\ dy) \\ &= \int_{\{} (x, y) \in B_t\} \frac{1}{\pi R^2} \mathbf{1}_{x^2 y^2 \leq R^2}\ dx\, dy \\ &= \frac{\pi t^2}{\pi R^2} \qquad\qquad = \frac{t^2}{R^2} \end{aligned}$$

La fonction de répartition de $\|U_2\|$ est donc continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{R\}$ et de dérivée $t \mapsto \frac{2t}{R} \mathbf{1}_{t \in [0,R]}$, là où elle est dérivable.

$\|U\|_2$ est donc de densité $t \mapsto \frac{2t}{R} \mathbf{1}_{t \in [0,R]}$.
4. On sait que si un couple $(X, Y)$ est de densité $(x, y) \mapsto f_{X,Y}(x, y)$, alors $X$ est une variable aléatoire à densité et que se densité est $y \mapsto \int_{y \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)\ dy$.

Ici, on en déduit que la densité $f_X$ de $X$ est nulle en dehors de l'intervalle $[-R, R]$ et que pour tout $x$ de $[-R, R]$, on a:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi R^2} \mathbf{1}_{y^2 \leq R^2 - x^2} \, dy \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{R^2-x^2}} dy \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2} \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2} \mathbf{1}_{[-R,R]}(x) \end{aligned}$$

5. $|X|$ est intégrable car bornée par $R$ et on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X|) &= \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^{R} |x| \, \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \Big[ \frac{-1}{2 \cdot 3/2} (R^2 - x^2)^{3/2} \Big]_0^R \qquad\qquad = \frac{4}{3\pi R^2} R^3 = \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$

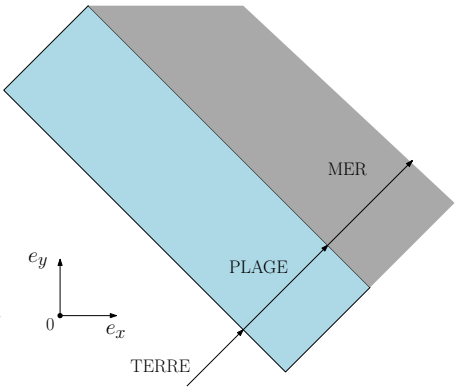
6. $X$ et $Y$ suivent la même loi donc $\mathbb{E}(\|U\|_1) = \mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|Y|) = \frac{8}{3\pi} R$.

On obtient donc que $\mathbb{E}(\|U\|_1) > \mathbb{E}(\|U\|_2)$, ce qui est un résultat attendu car, pour tout vecteur $u$ de $\mathbb{R}^2$, on a $\|u\|_1^2 \geq \|u\|_2^2$, donc $\|u\|_1 \geq \|u\|_2$.

$\|U\|_1^2 = (|X| + |Y|)^2 \geq X^2 + Y^2 = \|U\|_2^2$

**Exercice 5. — Une histoire de drones**

Trois drones $D_1, D_2$ et $D_3$ se déplacent sur le plan $\mathbb{R}^2$ paramètré par le repère centré en 0 et avec base $e_x = (1, 0)$ $e_y = (0, 1)$ (voir dessin). **L'unité de mesure du repère est le mètre.** Ils partent tous les trois de l'origine 0 situé sur le littoral ("terre"). Une plage est à proximité, modélisée ici par un rectangle infini orienté à $45^o$, de largeur 4km et située à distance Euclidienne 1km de l'origine (i.e. le grain de sable le plus proche de l'origine est à 1km au point $(\frac{1000}{\sqrt{2}}, \frac{1000}{\sqrt{2}})$). Après la plage, on trouve une mer modélisée par un demi-plan incliné de $45^o$ et située à 5km de l'origine. Les 3 drones se déplacent aléatoirement avec des pas i.i.d de mesures respectives:




$$\mu_1 = \text{Loi du vecteur Gaussien centré de matrice de covariance } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 := \frac{1}{4}\delta_{(2,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(-2,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,-1)}$$

$$\mu_3 = \frac{49}{100}\delta_{(1,0)} + \frac{49}{100}\delta_{(-1,0)} + \frac{2}{100}\delta_{(0,1)}$$

Le drone $D_1$ se trouve au temps $n$ en $D_1(n) = X_1 + \ldots + X_n \in \mathbb{R}^2$, $D_2$ est en $D_2(n) = Y_1 + \ldots + Y_n \in \mathbb{R}^2$ et $D_3$ est en $D_3(n) = Z_1 + \ldots + Z_n$ ou les pas sont indépendants et de loi $\mu_1, \mu_2, \mu_3$.

1. Rappeler brièvement quel est l'énoncé du TCL dans $\mathbb{R}^2$
2. L'appliquer aux positions $D_1(n), D_2(n), D_3(n)$ quand $n \to \infty$

La batterie des drones meurt au temps $N = 10^6$. On veut savoir qui a le plus de chance de tomber dans l'eau. Soit $u$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de norme euclidienne 1m et de coordonnés $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ et soient $P_1(n) := \langle u, D_1(n)\rangle$ (resp $P_2(n) := \langle u, D_2(n)\rangle$, $P_3(n) := \langle u, D_3(n)\rangle$).

3. En quoi les processus $n \mapsto P_k(n), k \in \{1,2,3\}$ sont-ils pertinents pour notre problème ?
4. Rappeler brièvement la loi des grands nombres et appliquer la à chacun de ces 3 processus.
5. Appliquer le TCL dans $\mathbb{R}$ à chacun de ces 3 processus.
6. Si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ et si $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, montrer que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}\big[X > a\big] \leq \mathbb{P}\big[Y > a\big]$. (Indication : on pourra trouver $\lambda$ tel que $\lambda * X$ a même loi que $Y$ et conclure).
7. Conclure : quitte à faire quelques approximations (que l'on justifiera), quel est selon vous le drone qui a la plus forte probabilité de tomber dans la mer ? Celui qui a la plus forte probabilité de tomber dans le sable ?

**Correction.**
1.
2. $\frac{D_1(n)}{\sqrt{n}}$ a même loi que $X_1$ a savoir la Gaussienne centrée de même matrice de covariance.
Les incréments de $D_2(n)$ sont i.i.d. **centrés**, $L^2$. Donc $\frac{D_2(n)}{\sqrt{n}}$ **converge en loi** vers la Gaussienne de matrice de covariance

$$K_2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{4}2^2 + \frac{1}{4}(-2)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}1^2 + \frac{1}{4}(-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Le TCL pour $D_3(n)$ est plus délicat. En effet les increments sont bien $L^2$ mais non centrés! On a donc

$$\frac{D_3(n) - n\mathbb{E}\big[Z_1\big]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(loi)} \mathcal{N}(0, K_3)$$

ou $\mathbb{E}\big[Z_1\big]$ est le vecteur vertical $\frac{2}{100} * (0,1)$. la matrice de covariance $K_3$ est donnée par

$$K_3 := \begin{bmatrix} 2 * \frac{49}{100} * 1^2 & 0 \\ 0 & \frac{196}{100^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{98}{100} & 0 \\ 0 & \frac{196}{100^2} \end{bmatrix}$$

3.
4. La loi des grands nombres s'applique aux 3 processus car les increments sont indépendants, de même loi, et $L^1$ (en justifiant). Les increments pour $P_1(n)$ et $P_2(n)$ sont de moyenne nulle, il y a donc convergence p.s. vers 0 de $P_1(n)/n$ et $P_2(n)/n$. Les increments de $P_3(n)$ on moyenne $\frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{2}{100} * 1 = \frac{\sqrt{2}}{100}$. On a donc convergence p.s. de $P_3(n)/n$ vers $\frac{\sqrt{2}}{100}$.
5. En utilisant le fait que

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On observe qu'un vecteur Gaussien de covariance $K_1$ peut s'écrire comme $(W + X, W + Y)$ ou $W, X, Y$ sont des Gaussiennes independantes de variance 1.
On en déduit que le processus $P_1(n)$ est une somme de Gaussiennes indépendantes de même loi que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(W + X) + \frac{1}{\sqrt{2}}(W + Y) = \frac{2}{\sqrt{2}}W + \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y$$

qui est une Gaussienne centrée de variance $2 + 1/2 + 1/2 = 3$.

(ou peut aussi calculer la variance de $\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ si $(X, Y)$ est de covariance $\Sigma_1$.

Pour $P_2(n)$, avec probabilité $1/2$ on se déplace le long de $u$ de $\pm 1 * 2 * (\frac{1}{\sqrt{2}})$ et on se déplace

avec probabilité $1/2$ le long de $u$ de $\pm 1 * 1 * (\frac{1}{\sqrt{2}})$. Ca donne une variance pour chaque pas de $1/2 * 4 * 1/2 + 1/2 * 1 * 1/2 = 5/4$. On a donc

$$\frac{D_1(n)}{\sqrt{n}} \text{tend en loi vers } \mathcal{N}(0,3)$$
$$\frac{D_2(n)}{\sqrt{n}} \text{tend en loi vers } \mathcal{N}(0,\frac{5}{4})$$
$$\frac{D_3(n) - n * \frac{\sqrt{2}}{100}}{\sqrt{n}} \text{ tend en loi vers } \mathcal{N}(0, 98/100 * 1/2)$$

6. On a en loi $Y = \lambda * X$ ou $\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} > 1$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}\big[Y > a\big] = \mathbb{P}\big[\lambda X > a\big] = \mathbb{P}\big[X > \frac{1}{\lambda} a\big] = \int_{\frac{1}{\lambda}a}^{\infty} P_X(dx) > \int_a^{\infty} P_X(dx) = \mathbb{P}\big[X > a\big]$$

7. En $N = 10^6$, $D_3$ se retrouve vraiment loin à la verticale, a peu près en $10^6 * \frac{\sqrt{2}}{100} \approx 1.41 * 10000 \approx$ 14 kms plus ou moins une fluctuation d'ordre $\sqrt{N} * \sqrt{1/2 * 98/100}$ qui est petite. Donc $D_3$ a de fortes chances d'etre dans l'eau ! En utilisant la question précédente. $D_1(N)/\sqrt{N}$ est proche d'une Gaussienne $N(0,3)$ a donc plus de chance de tomber dans le sable ou au dela que $D_2$. Vu que $D_2$ comme $D_3$ ont très peu de chance de se retrouver si loin (5km) au temps $N = 10^6$ (La gaussienne $N(0,3)$ a peu de masse sur $[5,\infty)$), on en déduit que $D_1$ a plus de chance de tomber dans le sable que $D_1$ et $D_3$ (qui lui est presque sur d'être mouillé).