Licence de Mathématiques — Année 2024-2025

Université Claude Bernard Lyon 1 — Parcours Mathématiques générales et applications

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

1. La méthode

On veut résoudre un système linéaire $AX = B$ de n équations à n inconnues avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Les méthodes directes fournissent la solution $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ en un nombre fini d'opérations. Si la taille du système est élevée, le nombre d'opérations est important. Or, les erreurs de calculs dépendent directement du nombre de calculs, et le résultat calculé par une méthode directe peut alors s'avérer éloigné de la solution exacte.

Le but des méthodes itératives est de construire une suite de vecteurs $\bar{x}^{(k)}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$, qui tend vers la solution exacte $\bar{x}$. Le point de départ est une approximation $\bar{x}^{(0)}$ de $\bar{x}$ obtenue par exemple par une méthode directe.

2. Un Exemple

On considère le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ la solution exacte du système. Chaque coordonnée x_i peut s'exprimer en fonction des autres. Avec la première ligne on calcule x_1, avec la deuxième x_2, etc. Pour l'exemple on obtient :

- La ligne 1 donne $x_1 = -x_2$
- La ligne 2 donne $x_2 = -1 - x_1 + x_3$
- La ligne 3 donne $x_3 = 2 - x_2$

Si nous ne connaissons pas la solution mais que nous avons une valeur approchée $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$, alors il est possible de construire une suite de nouvelles approximations en utilisant les équations définies à l'étape précédente. À chaque itération, on se rapproche de la solution exacte.

La première itération est :

$$x_1^{(1)} = -x_2^{(0)}, \quad x_2^{(1)} = -1 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)}, \quad x_3^{(1)} = 2 - x_2^{(0)}.$$

La méthode de Jacobi consiste à itérer tant que l'on n'est pas assez proche de la solution. On calcule une nouvelle approximation :

$$x_1^{(2)} = -x_2^{(1)}, \quad x_2^{(2)} = -1 - x_1^{(1)} + x_3^{(1)}, \quad x_3^{(2)} = 2 - x_2^{(1)}.$$

Puis $(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})$, etc.

Mais il existe des conditions pour que cette itération converge.

Définition 1. Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite à diagonale strictement dominante si $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, $|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|$.

Théorème 1. Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi est convergente quel que soit le vecteur initial.

3. Travail demandé

Nous considérons le système linéaire $AX = B$ où A est une matrice de taille n.

Nous notons $\bar{x}^{(0)}$ le vecteur initial.

Nous estimons avoir la solution lorsque nous avons calculé un vecteur $\bar{x}^{(k)}$ tel que $A\bar{x}^{(k)}$ est assez proche de B, c'est-à-dire tel que $\|A\bar{x}^{(k)} - B\| \leq \varepsilon$ pour un ε donné au départ.

(1) La solution exacte de l'exemple est $(-1, 1, 1)$. Faites tourner l'exemple en partant du vecteur $(-0.5, 1, 1)$.
(2) Écrire une méthode qui indique si une matrice donnée est à diagonale strictement dominante.
(3) Pour un tableau de réels t donné en paramètre, écrire une méthode qui indique si $\|At - B\| \leq \varepsilon$.
(4) Écrire une méthode `Jacobi` qui retourne une solution du système.