Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps

UE de calcul différentiel, courbes et surfaces

Feuille d'exercices n° 9 : Courbes et surfaces

Exercice 1. Rappel (ou pas) : on appelle *point double* d'une courbe paramétrée définie par $(x,y) = f(t)$ pour $t \in I$ (intervalle de $\mathbb{R}$) et $f : I \to \mathbb{R}^2$ dérivable, un point $u_0 \in \mathbb{R}^2$ pour lequel il existe exactement deux valeurs t_1 et $t_2 \in I$ telles que $u_0 = f(t_1) = f(t_2)$.

a) Soit la courbe $\mathcal{C}$ définie par $(x,y) = f(t) := (3t^3 + 2t^2 - t - 1, 3t^2 + 2t + 1)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'elle possède un unique point double et déterminer une équation de ses tangentes en ce point.

b) Soit la courbe $\mathcal{L}$ définie par $(x,y) = (2\sin t, \sin(2t))$ pour $t \in [0, 2\pi[$. Même question que ci-dessus.

c) Montrer que la courbe $\mathcal{L}$ est symétrique par rapport à l'axe des x et par rapport à l'axe des y.

d) Déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{L}$ au voisinage desquels cette courbe est paramétrée par x et ceux où elle est paramétrée par y.

e) Dessiner la courbe $\mathcal{L}$.

Exercice 2. Rappel (ou pas) : on appelle *surface de niveau* d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'ensemble $\mathcal{S}$ des points (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ où $f(x,y,z) = c$, c étant un réel fixé (alors appelé niveau de la surface). Cette surface $\mathcal{S}$ admet en chaque point (x_*, y_*, z_*) qui n'est pas un point critique de f un *plan tangent* d'équation cartésienne $D_{(x_*,y_*,z_*)}f(x - x_*, y - y_*, z - z_*) = 0$.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3$, ainsi que sa surface de niveau 0 dans $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer l'équation du plan tangent à cette surface au point $(1,1,1)$.

b) Vérifier qu'au voisinage du point $(1,1,1)$ cette surface est le graphe d'une fonction $z = g(x,y)$.

c) Écrire le pôlynome de Taylor d'ordre deux de g au point $(1,1)$. Quelle est la matrice hessienne de g en ce point ?

d) Quelle est la position de la surface par rapport au plan tangent ?

Exercice 3. Rappel (ou pas) : on appelle *point régulier* d'une surface paramétrée définie par $(x,y,z) = f(u,v)$ pour $(u,v) \in W$, ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : W \to \mathbb{R}^3$ dérivable, un point $(x_r, y_r, z_r) = f(u_r, v_r)$ tel que les vecteurs $\partial_u f(u_r, v_r)$ et $\partial_v f(u_r, v_r)$ soient indépendants. En un point régulier $f(u_r, v_r)$, cette surface admet un *plan tangent* engendré par $\partial_u f(u_r, v_r)$ et $\partial_v f(u_r, v_r)$.

Soit $\mathcal{S}$ la surface paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(u,v) = u^2, \\ y(u,v) = uv, \\ z(u,v) = 2u + v, \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Déterminer l'unique point de $\mathcal{S}$ qui ne soit pas régulier.

b) Trouver une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point de paramètres $(1,1)$.

c) Montrer que $\mathcal{S}$ est incluse dans la surface d'équation cartésienne

$$(2x + y)^2 = z^2 x.$$

Cette inclusion est-elle une égalité ?

d) Retrouver l'équation du plan de la question 2 en utilisant l'équation cartésienne de la question 3.

Exercice 4. Rappel (ou pas) : une surface paramétrée est dite *régulière* si elle n'a que des points réguliers.

Soit S la surface paramétrée par $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$\varphi(s,t) = \Big(\frac{2s}{1+s^2+t^2}, \frac{2t}{1+s^2+t^2}, \frac{s^2+t^2-1}{1+s^2+t^2}\Big).$$

a) Montrer que S est incluse dans une surface d'équation cartésienne simple que l'on précisera. Quelle est cette surface ?

b) Montrer que S est régulière et calculer son plan tangent en tout point.

Exercice 5. Rappel (ou pas) : on dit que deux surfaces régulières sont *transverses* en un point d'intersection si leurs plans tangents sont transverses. En particulier, des surfaces S et C plongées dans $\mathbb{R}^3$ sont transverses en un point $S \cap C$ si la somme du plan tangent à S et du plan tangent à C est $\mathbb{R}^3$. Deux surfaces régulières sont dites transverses si elles le sont en tout point de leur intersection. L'intersection de deux surfaces régulières transverses est une courbe régulière dont la tangente est donnée par l'intersection des plans tangents (qui est de dimension 1).

Soit R un réel strictement positif. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la *sphère* S de centre $(0,0,0)$ et de rayon R, et le *cylindre* C passant par $(0,0,0)$, de rayon $R/2$ et d'axe parallèle à la direction z.

a) Écrire une équation cartésienne de S et une équation cartésienne de C.

b) Écrire une équation paramétrique de S, puis une équation paramétrique de $V := S \cap C$.

c) Déterminer les points où S et C sont transverses.

d) Vérifier que V est aussi l'intersection de S et du *cône* Δ d'équation cartésienne $z^2 = (x-R)^2 + y^2$.

e) Écrire une équation paramétrique de Δ. Quels sont les points réguliers de Δ ?

f) Le cône Δ est-il transverse à S ?

Exercice 6. Soient r et R avec $R \geqslant r > 0$. Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les *cylindres* $C_1(R)$ et $C_2(r)$ respectivement de rayon R et d'axe Ox, et de rayon r et d'axe Oy. On notera $\mathbf{C}_1(R)$ et $\mathbf{C}_2(r)$ les cylindres solides correspondants.

a) Écrire une équation cartésienne de $C_1(R)$ et $C_2(r)$.

b) Déterminer les points où $C_1(R)$ et $C_2(r)$ sont transverses. On distinguera les cas $R > r$ et $R = r$.

c) On considère le demi-cylindre $C_1^+(R) := \{(x,y,z) \in C_1(R) \,;\, y \geqslant 0\}$. Écrire une équation paramétrique de $C_1^+(R)$ dans les coordonnées $(U = x, V = R\theta)$ où $\theta \in [-\pi, \pi]$ est l'angle par rapport à la "verticale", c'est-à-dire la direction z, dans le plan orthogonal à l'axe Ox du cylindre.

d) En déduire une équation cartésienne en coordonnées (U,V) de $C_1^+(R) \cap C_2(r)$. Quelle est la courbe ainsi obtenue dans le cas $R = r$? Quelle est l'allure de la courbe dans le cas $R > r$?

e) Écrire une équation paramétrique de $C_2^+(r) := \{(x,y,z) \in C_2(r) \,;\, x \geqslant 0\}$ dans les coordonnées $(u = y, v = r\varphi)$ où $\varphi \in [-\pi, \pi]$ est l'angle par rapport à la verticale dans le plan orthogonal à l'axe Oy.

f) En déduire une équation cartésienne en coordonnées (u,v) de $C_1(R) \cap C_2^+(r)$. Quelle est la courbe ainsi obtenue dans le cas $R = r$? Quelle est l'allure de la courbe dans le cas $R > r$?

g) On fixe désormais $R > r > 0$ et on considère le solide $\mathbf{R} := (\mathbf{C}_1(R) \cap \mathbf{C}_2(R)) \setminus (\mathrm{Int}(\mathbf{C}_1(r) \cup \mathbf{C}_2(r)))$, c'est-à-dire l'intersection des deux grands cylindres solides à laquelle on enlève la réunion des deux petits cylindres solides, ou plus exactement leur intérieur. Dessiner les projections de $\mathbf{R}$ sur le plan horizontal Oxy et sur le plan vertical Oxz (ou Oxy). Facultatif : écrire un code pour un logiciel de modélisation 3D, par exemple OpenSCAD, permettant d'imprimer $\mathbf{R}$ en 3D.

h) On note $\mathcal{R}$ la surface de $\mathbf{R}$. Déterminer l'ensemble des points où $\mathcal{R}$ a un plan tangent.

i) À l'aide de ce qui précède, trouver un *patron* de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire un ensemble de figures planes permettant de couvrir exactement le solide $\mathbf{R}$. Les dessiner à main levée. Facultatif : écrire un code pour un logiciel de géométrie, comme Geogebra, permettant d'imprimer ce patron.

NB : l'objet $\mathbf{R}$ a été "inventé" par le sculpteur contemporain Ulysse Lacoste, qui lui a donné le nom de "Rulpidon". Il en détient les droits d'auteur et il est donc interdit de commercialiser cet objet.