Feuille d'exercices n° 8 : Fonctions implicites, courbes et surfaces

Exercice 1. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points (x, y) du plan vérifiant $x^3 - 2xy + 2y^2 = 1$.

a) Montrer que les points de $\mathcal{C}$ au voisinage du point $(1, 1)$ sont de la forme $(x, \varphi(x))$, où φ est une fonction régulière au voisinage de 1. Déterminer la tangente au graphe de φ au point $(1, 1)$ et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de ce point.

b) Trouver tous les points de $\mathcal{C}$ au voisinage desquels le théorème des fonctions implicites ne s'applique ni pour exprimer x en fonction de y ni pour exprimer y en fonction de x.

Exercice 2 (Stabilité des points réguliers et des points critiques de Morse)**.** Soient Λ un espace vectoriel de dimension finie et une fonction $f : \Lambda \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$ on notera $f_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\lambda(x) = f(\lambda, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

a) On suppose ici que 0 n'est pas un point critique de f_0 (on dit qu'il est *régulier*). Montrer que, pour λ suffisamment proche de 0, f_λ n'a pas de point critique proche de 0.

b) Rappel (ou pas) : on appelle *point critique de Morse* d'une fonction régulière un point critique de cette fonction où sa Hessienne est non dégénérée. On dit aussi qu'un tel point critique est non-dégénéré. On suppose maintenant que 0 est un point critique de Morse de f_0. Montrer que, pour λ suffisamment proche de 0, f_λ a un unique point critique au voisinage de 0. Si on le note $a(\lambda)$, montrer que c'est un point critique de Morse et que la fonction $\lambda \mapsto a(\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c) Peut-on généraliser ce résultat aux points critiques dégénérés de f_0 ? À ceux qui sont isolés ?

Exercice 3 (Lemme de Morse en dimension 2)**.** Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que 0 est un point critique de Morse de f, c'est-à-dire que $d_0 f = 0$ et $d_0^2 f$ est une forme bilinéaire non dégénérée.

a) Montrer qu'il existe des fonctions α, β, $\gamma : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = f(0, 0) + \alpha(x, y)x^2 + 2\beta(x, y)xy + \gamma(x, y)y^2.$$

b) On suppose ici que la forme quadratique associée à $d_0^2 f$ est de signature $(+-)$. Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset U$ de $(0, 0)$ et des fonctions $u, v : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall (x, y) \in V, \quad f(x, y) = f(0, 0) + u(x, y)^2 - v(x, y)^2,$$

et l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ est un difféomorphisme de V sur son image.

c) Comment adapter ce résultat aux cas des signatures $(++)$ et $(--)$?

Exercice 4 (Courbes de niveau)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Rappel (ou pas) : on appelle *courbe de niveau* de f un ensemble de la forme $\{(x, y) \in U ; f(x, y) = c\}$, où c une constante arbitraire.

a) Soit (x_0, y_0) un point régulier de f. Montrer que l'ensemble $\{(x, y) \in U ; f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$ est une courbe au voisinage de (x_0, y_0) que l'on peut paramétrer soit par x soit par y.

b) En utilisant l'exercice précédent, que peut-on dire des courbes de niveau de f au voisinage d'un point critique de Morse ?

c) On considère ici la fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}y^2 - \cos x$. Calculer ses points critiques et étudier ses courbes de niveau.

Exercice 5 (Rang constant)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées $n \times n$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles.

a) Rappeler pourquoi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert et calculer la différentielle de l'application φ définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = M^{-1}$.

b) On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application ψ définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $\psi(M) = MAM^{-1}$. Montrer que ψ est différentiable, calculer sa différentielle et montrer ψ est de rang constant (c'est-à-dire que sa différentielle $D_M\psi$ est de rang indépendant de M).

Exercice 6 (Projection stéréographique)**.** Soit $\mathbb{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2+y^2+z^2 = 1\}$, $N = (0,0,1)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que pour tout $M = (x,y,z) \in \mathbb{S}\backslash\{N\}$ il existe un unique $P \in \mathcal{P}$ tel que N, M, P soient alignés. Faire un dessin et calculer les coordonnées (X,Y) de P en fonction de (x,y,z). Dans la suite, on notera $(X,Y) = \sigma(x,y,z)$.

b) Déterminer l'ensemble des points $M = (x,y,z)$ au voisinage desquels $\mathbb{S}$ est le graphe d'une fonction régulière de (x,y).

c) On note $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2+y^2 < 1\}$ et $\mathbb{E}_\pm = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; (x,y) \in \mathbb{D},\ \pm z > 0\}$. Montrer qu'il existe des fonctions $\varphi_\pm$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}^\pm$ telles que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{E}_\pm : (x,y,z) \in \mathbb{S} \Leftrightarrow z = \varphi_\pm(x,y).$$

d) Vérifier que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{E}_- \cap \mathbb{S}$, $\sigma(x,y,z) \in \mathbb{D}$ et que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{E}_+ \cap \mathbb{S}$ tel que $z \neq 1$, $\sigma(x,y,z) \notin \overline{\mathbb{D}}$. Montrer que la fonction $\psi_- : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\psi_-(x,y) = \sigma(x,y,\varphi_-(x,y))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sur quel domaine peut-on définir une fonction ψ_+ par $\psi_+(x,y) = \sigma(x,y,\varphi_+(x,y))$? Est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine ?

Exercice 7 (Tore)**.** Soient r et R deux nombres réels strictement positifs, $R > r$ et soit

$$\mathbb{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x = (R + r\cos v)\cos u,\ y = (R + r\cos v)\sin u, z = r\sin v\,, (u,v) \in [0, 2\pi[^2\}.$$

a) Dessiner $\mathbb{T}$.

b) Écrire une équation cartésienne de $\mathbb{T}$.

c) Déterminer l'ensemble des points de $\mathbb{T}$ au voisinage desquels $\mathbb{T}$ est le graphe d'une fonction de (x,y).