

---

**Feuille d'exercices n° 4: Théorème des accroissements finis**

---

- Exercice 1.**
1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application dérivable telle que pour tout  $x$ ,  $f'(x) \neq 0$ . Montrer que  $f$  est un homéomorphisme sur  $f(\mathbb{R})$  et que  $f^{-1}$  est dérivable en tout point de  $f(\mathbb{R})$ .
  2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ . Montrer que  $f'(0)$  existe et est non nulle mais que  $f$  n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

**Exercice 2.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$  et soit  $g = f \circ f$ .

1. Montrer que  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2. Calculer la matrice jacobienne  $J_f(x, y)$  en tout point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et calculer la matrice jacobienne  $J_g(0, 0)$ .
3. Montrer qu'il existe  $\rho > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in \overline{B}((0, 0), \rho)$ , on a  $\|J_g(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$ .
4. Montrer que  $g$  admet un unique point fixe dans la boule  $\overline{B}((0, 0), \rho)$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (\cos x - \sin y, \sin x - \cos y)$ .

1. Montrer que  $\|Df(x, y)\| \leq \sqrt{2}$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
2. En déduire que pour tout  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , la suite récurrente  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$

converge. Donner l'équation satisfaite par sa limite.

**Exercice 4.** Soit  $F$  une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$  munie de sa topologie usuelle. On définit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto d(x, F)$ . On rappelle que  $f$  est 1-lipschitzienne et que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ , il existe  $y \in F$  tel que  $f(x) = d(x, y)$ . On veut montrer que si  $f$  est différentiable en  $x$ ,  $y$  est unique .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ . On suppose que  $f$  est différentiable en  $x$ . Montrer que  $\|\nabla f(x)\| \leq 1$ .
2. Soit  $y \in F$  tel que  $d(x, y) = f(x)$ .  
On considère la fonction  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f((1-t)x + ty)$ .  
En calculant  $\varphi'(0)$  de deux façons, montrer d'une part que  $\varphi'(0) = \nabla f(x) \cdot (y - x)$  et d'autre part que  $\varphi'(0) \leq -\|x - y\|$ . En déduire que  $\nabla f(x) \cdot (\frac{x-y}{\|x-y\|}) = 1$  et que  $\|\nabla f(x)\| = 1$ .
3. En déduire que  $y$  est unique.

**Exercice 5.** On considère  $E = l^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des suites réelles  $u = (u_n)$  telles que  $\|u\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  est fini. L'espace vectoriel  $E$  est alors normé par la norme  $\|\cdot\|_1$ .

1. Montrer que l'ensemble des suites s'annulant à partir d'un certain rang est dense dans  $E$ .
2. Montrer que pour toute forme linéaire continue  $L$  sur  $E$ , il existe une suite bornée  $a = (a_0, a_1, \dots)$  telle que pour tout  $u \in E$ ,  $L(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ .
3. Montrer que la norme  $\|\cdot\|_1$  (vue comme application de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ) n'est différentiable en aucun point  $u \in E$ . On pourra raisonner par l'absurde en s'aidant de la question 1 et en commençant par le cas où  $u_n = 0$  pour au moins un  $n$ . Dans le cas restant où  $u$  ne s'annule pas, on pourra considérer des accroissements  $h = (h_n)$  tels que pour  $N$  choisi assez grand,  $h_n = 0$  pour  $n \leq N - 1$  et  $h_n = -2u_n$  sinon.