
Feuille d'exercices n° 3: Fonctions différentiables (suite)

Exercice 1. Soit $f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^{-1}$. Déterminer la différentielle de f , d'abord en $M = I_n$ puis en un point M quelconque.

Exercice 2. On note $D \subset \mathbb{C}$ le disque unité ouvert centré à l'origine.

1. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$ -dérivable en un point $a \in D$. Montrer que f est différentiable au point a et énoncer les équations de Cauchy-Riemann.
2. Montrer que la fonction $z \mapsto z^3$ est entière.
3. Donner l'exemple d'une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ différentiable en tout point mais qui ne vérifie les équations de Cauchy-Riemann en aucun point.

Exercice 3. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit u un endomorphisme symétrique de E (i.e. $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$).

1. On définit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \langle u(x), x \rangle$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.
2. Soit $g : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x)}{\langle x, x \rangle}.$$

Montrer que g est différentiable en tout point.

Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$D_a g = 0 \iff a \text{ est un vecteur propre de } u.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que f est homogène de degré α si

$$\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(t(x, y)) = t^\alpha f(x, y).$$

Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Pour l'implication " $\Leftarrow$ ", on pourra considérer l'application $g : t \mapsto f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle.

Exercice 5. On note $C^0([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Soit $f : \varphi \in C^0([0, 1]) \mapsto \int_0^1 \varphi^4(t) dt \in \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f .

Exercice 6. On munit $C^2([0, 1])$ de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$. Soit $f : \varphi \in C^2([0, 1]) \mapsto \int_0^1 ((\varphi')^2(t) - \varphi^2(t)) dt \in \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f . Caractériser les éléments $\varphi \in C^2([0, 1])$ tels que la différentielle Df s'annule en φ .

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application différentiable. On suppose que $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \|f(v)\| = +\infty$ et que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $Df(v)$ est injective. Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^2$, on définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \|f(v) - a\|^2$.

1. Déterminer $D_v g$ en tout point v .
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure en un certain point v_0 et que $D_{v_0} g = 0$ puis conclure.