Calcul différentiel, courbes et surfaces - Partiel du 14 mars 2025

Exercice 1 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = xy\, e^{-\pi(x^2+y^2)}$.

On a $f(x,y) = g(x)g(y)$ avec $\underline{g(x) := x\, e^{-\pi x^2}}$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, en tant que produit de l'identité et de la composée $x \mapsto -\pi x^2$ et exp, toutes $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à x et y, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\underline{\partial_x f(x,y) = g'(x)g(y)}$, $\underline{\partial_y f(x,y) = g(x)g'(y)}$, avec $\underline{g'(x) = e^{-\pi x^2}\left(1 - 2\pi x^2\right)}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les points critiques de f sont par définition les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $\partial_x f(x,y) = 0 = \partial_y f(x,y)$.

D'après l'expression des dérivées partielles de f, (x,y) est un point critique de f ssi $(g'(x) = 0$ ou $g(y) = 0)$ et $(g(x) = 0$ ou $g'(y) = 0)$. Comme g ne s'annule qu'en 0, et $g'(0) \neq 0$, on en déduit que f admet exactement 5 points critiques :

- le point $(0,0)$;
- les quatre points (x,y) tels que $g'(x) = 0$, $g'(y) = 0$, c'est-à-dire : $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{+1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ et $\left(\frac{+1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

On remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(-x,-y)$.

Par suite, les points critiques $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ et $\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ sont de même nature, tout comme $\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{+1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ et $\left(\frac{+1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

La matrice Hessienne de f en un point (x,y) quelconque est :

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} g''(x)g(y) & g'(x)g'(y) \\ g'(x)g'(y) & g(x)g''(y) \end{pmatrix}$$

Comme $g(0) = 0$, $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & g'(0)^2 \\ g'(0)^2 & 0 \end{pmatrix}$, avec $g'(0) \neq 0$: cette matrice admet deux racines réelles non nulles de signe opposé : $\pm g'(0)^2$.

Donc $(0,0)$ est un point selle.

Aux points (x,y) tels que $g'(x) = g'(y) = 0$, $H(x,y) = \begin{pmatrix} g''(x)g(y) & 0 \\ 0 & g(x)g''(y) \end{pmatrix}$.

Comme $g''(x) = e^{-\pi x^2}\left(-2\pi x(1 - 2\pi x^2) - 4\pi x\right)$, cette expression de $H(x,y)$ se réduit à :

$$H(x,y) = -4\pi xy\, e^{-\pi(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ lorsque } g'(x) = g'(y) = 0.$$

Par suite, $H(x,y)$ est définie positive lorsque $xy < 0$ et définie négative si $xy > 0$.

Ceci montre que les points $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ et $\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ sont des maxima locaux de f, tandis que $\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{+1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ et $\left(\frac{+1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ sont des minima locaux de f.

Par ailleurs, f est bornée car g est bornée, puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$, par comparaison de $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-\pi x^2}$, ce qui entraîne de plus que $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = 0$.

Donc il existe $R > \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ tel que pour $\|(x,y)\| \geqslant R$,

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) < f(x,y) < \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right),$$

puisque $f\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) > 0$ et $f\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) < 0$.

Par suite, $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f \geqslant f\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ est atteinte dans le compact $\overline{B}_R = \{(x,y) ; \|(x,y)\| \leqslant R\}$, de même que $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f \leqslant f\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, et même dans l'ouvert $B_R = \{(x,y) ; \|(x,y)\| < R\}$, par définition de R.

Donc $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f$ sont atteintes en un extremum local appartenant à B_R : c'est donc que $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f$ est atteinte en $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ et $\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, où f prend la même valeur, et $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f$ est atteinte en $\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{+1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ et $\left(\frac{+1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, où elle prend aussi la même valeur.

Ceci montre que les premiers sont des <u>maxima globaux</u> et les seconds des <u>minima globaux</u>.

Exercice 2 :

1) Si $f : U \to F$ est différentiable en $x \in U$, il existe $\ell \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\lim\limits_{h \neq 0 \atop h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x) - \ell(h)}{\|h\|} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$; $\|h\| \leq \eta$ entraîne $\|f(x+h) - f(x) - \ell(h)\| \leq \varepsilon \|h\|$.

Soit $h \in E$ fixé, $h \neq 0$. Si $t \in \mathbb{R}$ est tel que $|t| \leq \dfrac{\eta}{\|h\|}$, alors

$\|f(x+th) - f(x) - \ell(th)\| \leqslant \varepsilon |t| \|h\|$.

En considérant $\varepsilon\|h\|$ au départ au lieu de ε, on obtient $\eta > 0$; $|t| \leq \dfrac{\eta}{\|h\|}$ entraîne $\|f(x+th) - f(x) - \ell(th)\| \leqslant \varepsilon |t|$.

Ceci montre que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x+th) - f(x) - \ell(th)}{t} = 0$, et donc que f est Gateaux-différentiable avec $\widehat{D}_x f = \ell = D_x f$.

2) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto \dfrac{|x_1|^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$ si $(x_1,x_2) \neq (0,0)$,
$g(0,0) = 0$.

a) Pour tout $(x_1,x_2) \neq (0,0)$, $g(tx_1, tx_2) = \dfrac{|t|^3 t \; |x_1|^3 x_2}{t^4 x_1^4 + t^2 x_2^2} = \dfrac{|t| t \; |x_1|^3 x_2}{t^2 x_1^4 + x_2^2}$: vaut 0 si $x_2 = 0$, pour tout $t \neq 0$ (car alors $x_1 \neq 0$).

Si $x_2 \neq 0$, $\dfrac{1}{t} g(tx_1, tx_2) = \dfrac{|t| \; |x_1|^3 x_2}{t^2 x_1^4 + x_2^2} \xrightarrow[t \neq 0]{t \to 0} 0$.

Donc dans tous les cas $\dfrac{1}{t} g(tx_1, tx_2) \xrightarrow[t \neq 0]{t \to 0} 0$.

Ceci montre que g <u>est Gateaux différentiable en $(0,0)$</u> et <u>$\widehat{D}_x g = 0$</u>.

b) <u>Aux points $(x_1,x_2) \neq (0,0)$</u>, g <u>est continue</u> comme quotient de $(x_1,x_2) \mapsto |x_1|^3 x_2$, continue comme produit de $(x_1,x_2) \mapsto x_2$ et $(x_1,x_2) \mapsto |x_1|^3$, composée de $(x_1,x_2) \mapsto |x_1|$ et $t \mapsto t^3$, et de $(x_1,x_2) \mapsto x_1^4 + x_2^2$, polynomiale.

Montrons que g est continue en $(0,0)$.

Pour $x_1^2 \leq |x_2|$, on a $|g(x_1,x_2)| \leqslant \dfrac{|x_1| \, x_2^2}{x_1^4 + x_2^2} \leqslant |x_1| \xrightarrow[(x_1,x_2) \to (0,0)]{} 0$.

Pour $x_1^2 > |x_2|$, on a $|g(x_1,x_2)| \leqslant \dfrac{|x_1|^5}{x_1^4 + x_2^2} \leqslant |x_1| \xrightarrow[(x_1,x_2) \to (0,0)]{} 0$.

Donc <u>$\lim\limits_{(x_1,x_2) \neq (0,0) \atop (x_1,x_2) \to (0,0)} g(x_1,x_2) = 0 = g(0,0)$</u>.

c) La fonction $(x_1,x_2) \mapsto \frac{x_2}{x_1^4+x_2^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction $\varphi : x \mapsto |x|^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, de dérivée $x \mapsto 3\,(\operatorname{sgn} x)\,x^2$. De plus, $\frac{|x|^3}{|x|} \to 0$ quand $x \to 0$, donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0)=0$. Comme $|3(\operatorname{sgn} x)\,x^2| \leqslant 3x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, ceci montre que φ' est continue en 0. Donc φ' est continue sur $\mathbb{R}$, et donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par suite, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

d) Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $g(\gamma(t)) = \frac{|t|}{2}$.

Si g était différentiable en $(0,0)$, la fonction $g\circ\gamma$ serait dérivable en 0 par composition de fonctions différentiables, γ étant polynomiale.

Or $t \mapsto |t|$ n'est pas dérivable en 0. Donc $g\circ\gamma$ ne l'est pas. Ceci contredit la différentiabilité de g.

3) $f : U \to F$, Gateaux-différentiable en tout $x \in U$;

$x \mapsto \widehat{D}_x f$ est continue.

a) Par définition, $\lim_{\tau\to 0} \frac{f(x+\tau h) - f(x) - \widehat{D}_x f(\tau h)}{\tau h} = 0$.

Avec $g(x) = f(x+a) - f(a) - \widehat{D}_a f(x)$, $a \in U$ ouvert, g est bien définie au voisinage de 0, $g(0)=0$ puisque $\widehat{D}_a f$ est linéaire (et donc $\widehat{D}_a f(0) = 0$),

$$\frac{g(\tau h) - g(0)}{\tau} = \frac{f(a+\tau h) - f(a) - \widehat{D}_a f(\tau h)}{\tau} \underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} 0$$ par définition de $\widehat{D}_a f$.

Donc g est Gateaux-différentiable en 0 et $\widehat{D}_0 g = 0$.

Plus généralement,
$$g(x+\tau h) - g(x) = f(x+a+\tau h) - f(a) - \widehat{D}_a f(x+\tau h) - f(x+a) + f(a) + \widehat{D}_a f(x) =$$
$$= f(x+a+\tau h) - f(x+a) - \widehat{D}_a f(\tau h)$$ par linéarité de $\widehat{D}_a f$.

Donc
$$\frac{g(x+\tau h) - g(x)}{\tau} = \frac{f(x+a+\tau h) - f(x+a) - \widehat{D}_{x+a} f(\tau h)}{\tau} + \frac{\widehat{D}_{x+a} f(\tau h) - \widehat{D}_a f(\tau h)}{\tau},$$
où le 1er morceau tend vers 0 quand $\tau \to 0$ par définition de $\widehat{D}_{x+a} f$ et le 2nd est
$$\frac{\widehat{D}_{x+a} f(\tau h) - \widehat{D}_a f(\tau h)}{\tau} = \widehat{D}_{x+a} f(h) - \widehat{D}_a f(h)$$ par linéarité.

Ceci montre que g est Gateaux différentiable en x et $\widehat{D}_x g = \widehat{D}_{x+a} f - \widehat{D}_a f$.

Comme $x \mapsto \hat{D}_x f$ est continue par hypothèse, on en déduit que $\hat{D}_x g \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = \hat{D}_0 g$. Donc $x \mapsto \hat{D}_x g$ est continue en 0. Elle l'est aussi en $x \neq 0$ puisque $x \mapsto \hat{D}_{x+a} f$ l'est.

b) La fonction $l : t \in [0,1] \mapsto g(th)$ est bien définie pour $h \in E$, $\|h\|$ assez petit, puisque g est bien définie au voisinage de 0.

Soit $t_0 \in]0,1[$. On a $\dfrac{l(t) - l(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{g(t_0 h + \tau h) - g(t_0 h)}{\tau}$, $\tau = t - t_0$.

D'après la question a), ceci tend vers $\hat{D}_{t_0 h + a} f(h) - \hat{D}_a f(h)$ quand $\tau \to 0$.

Donc l est dérivable en t_0 et $l'(t_0) = \hat{D}_{t_0 h + a} f(h) - \hat{D}_a f(h)$.

On en déduit en particulier, par l'inégalité des accroissements finis, que
$$\boxed{\| l(1) - l(0) \| \leq \sup_{t_0 \in]0,1[} ||| \hat{D}_{t_0 h + a} f - \hat{D}_a f ||| \, \|h\|.}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x \mapsto \hat{D}_x f$ est continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour $\|h\| \leq \eta$, $||| \hat{D}_{h+a} f - \hat{D}_a f ||| \leq \varepsilon$, ce qui implique
$$\sup_{t_0 \in]0,1[} ||| \hat{D}_{t_0 h + a} f - \hat{D}_a f ||| \leq \varepsilon.$$

Par suite on a : $\| l(1) - l(0) \| \leq \varepsilon \|h\|$.

Or $l(1) - l(0) = g(h) - g(0) = f(h+a) - f(a) - \hat{D}_a f(h)$.

On a donc : $\| f(h+a) - f(a) - \hat{D}_a f(h) \| \leq \varepsilon \|h\|$, pour $\|h\| \leq \eta$.

Ainsi, on a montré que $\displaystyle\lim_{h \neq 0 \to 0} \frac{\| f(h+a) - f(a) - \hat{D}_a f(h) \|}{\|h\|} = 0$.

Comme $\hat{D}_a f \in \mathcal{L}(E,F)$ par définition de la Gateaux différentiabilité, ceci prouve que f est différentiable en a et $D_a f = \hat{D}_a f$.

Exercice 3 :

1) a) La sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ est compacte, car fermée et bornée,

et $\mathbb{S}^{n-1} = \bigcup_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \{x \in \mathbb{S}^{n-1} ; \|x-y\| < \varepsilon\}$, pour $\varepsilon > 0$,

puisque pour tout $y \in \mathbb{S}^{n-1}$, l'ouvert $\mathcal{U}_\varepsilon(y) := \{x \in \mathbb{S}^{n-1} ; \|x-y\| < \varepsilon\}$ est par définition inclus dans $\mathbb{S}^{n-1}$ et que pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x)$. Donc par la propriété de Borel-Lebesgue, $\mathbb{S}^{n-1}$ admet un sous-recouvrement par un nombre fini d'ouverts $\mathcal{U}_\varepsilon(y)$, pour $y \in K$, partie finie de $\mathbb{S}^{n-1}$.

b) Si $f : E \to F$ est Lipschitzienne et Gateaux-différentiable, $g : E \to F$ telle que $\underset{\forall u \in E}{,}\ g(u) = f(x+u) - f(x) - \widehat{D}_x f(u)$ vérifie (à x fixé) :

- $g(0) = 0$, comme $\widehat{D}_x f$ est linéaire.
- g est Gateaux-différentiable d'après la question 3a) de l'exercice 2, où l'on n'a utilisé que la Gateaux-différentiabilité de f pour montrer celle de g, et $\widehat{D}_0 g = 0$.
- g est Lipschitzienne car $\|g(u) - g(v)\| \leq \|f(x+u) - f(x+v)\| + \|\widehat{D}_x f(u-v)\|$

par l'inégalité triangulaire, ie $\|g(u) - g(v)\| \leq L\|u-v\| + \|\widehat{D}_x f\| \, \|u-v\|$ où L est une constante de Lipschitz pour L et puisque $\widehat{D}_x f \in \mathcal{L}(E,F)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Gateaux différentiabilité de g, pour tout $y \in K$, il existe $\eta_y > 0$; si $0 < |\tau| \leq \eta_y$ alors $\dfrac{\|g(\tau y)\|}{|\tau|} \leq \varepsilon$.

Comme K est fini, on peut prendre $\eta := \min_{y \in K} \eta_y > 0$.

D'après la question a), pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, il existe $y \in K$ tel que $\|x-y\| < \varepsilon$. D'où $\|g(x) - g(y)\| < L'\varepsilon$, où L' est une constante de Lipschitz pour g, qui existe d'après la question b).

Par suite, pour tout $h \in E \setminus \{0\}$, il existe $y \in K$; $\left\| \frac{h}{\|h\|} - y \right\| < \varepsilon$,

ie $\| h - \|h\| y \| < \varepsilon \|h\|$, d'où $\| g(h) - g(\|h\| y) \| < L' \varepsilon \|h\|$.

De plus, si $\|h\| \leq \eta$, $\frac{\| g(\|h\| y) \|}{\|h\|} \leq \varepsilon$, ie $\| g(\|h\|y) \| \leq \varepsilon \|h\|$.

Donc par l'inégalité triangulaire, $\| g(h) \| < (L'+1) \varepsilon \|h\|$.

Ceci montre que g est différentiable en 0 et $D_0 g = 0$: $\lim\limits_{h \underset{\neq}{\to} 0} \frac{\|g(h)\|}{\|h\|} = 0$.

d) La question précédente montre que

$$\lim_{h \underset{\neq}{\to} 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - \widehat{D}_x f(h) \|}{\|h\|} = 0 .$$

Ceci implique, par définition de la différentiabilité, que f est différentiable en x et $D_x f = \widehat{D}_x f$.

2) ($E = \ell^1(\mathbb{N})$ est de dimension infinie et sa sphère unité n'est pas compacte.)

Soit $u \in E$; $u_n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $h \in E$, $\tau \in \mathbb{R}^*$,

On a $\dfrac{N(u+\tau h) - N(u)}{\tau} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n + \tau h_n| - |u_n|}{\tau}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{|u_n + \tau h_n| - |u_n|}{\tau} \xrightarrow[\tau \underset{\neq}{\to} 0]{} \operatorname{sgn}(u_n) \cdot h_n$, puisque $u_n \neq 0$,

et $\left| \dfrac{|u_n + \tau h_n| - |u_n|}{\tau} \right| \leq |h_n|$ par l'inégalité triangulaire,

et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\frac{N(u+\tau h) - N(u)}{\tau} \xrightarrow[\tau \underset{\neq}{\to} 0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sgn}(u_n) \cdot h_n .$$

Donc N est Gateaux différentiable et $\widehat{D}_u N(h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sgn}(u_n) \cdot h_n$:

en effet, $\left\| \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sgn}(u_n) \cdot h_n \right\| \leq \|h\|_E$ donc ceci définit bien $\widehat{D}_u N \in \mathcal{L}(E;F)$.

En revanche, on a vu en TD (fiche 4), que N n'est pas différentiable.

Elle est pourtant Lipschitzienne : $|N(u) - N(v)| \leq \|u - v\|_E$ par l'inégalité triangulaire. Le résultat de la question 1 est donc faux dans $\ell^1(\mathbb{N})$.