

Partiel

Mardi 18 mars 2025 — 9h45 – 11h15

Corrigé

Exercice 1 : (2 pts) Montrer que tout anneau intègre unitaire possédant un nombre fini d'idéaux est un corps.

(Indication : Pour $x \neq 0, 1$ considérer les idéaux (x) , (x^2) , (x^3) , etc.)

Solution. Soit A un tel anneau, et $x \in A \setminus \{0, 1\}$. On considère les idéaux (x) , (x^2) , (x^3) , etc. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux, il y a $1 \leq i < j$ avec $(x^i) = (x^j)$. En particulier $x^i \in (x^j)$ et il y a $a \in A$ avec $x^i = ax^j$, d'où $x^i(1 - ax^{j-i}) = 0$. Puisque A est intègre et $x \neq 0$ on a $ax^{j-i} = 1$. Mais $j - i = n + 1$ pour un $n \in \mathbb{N}$, et $ax^n x = 1$. Donc x possède un inverse multiplicatif; x étant arbitraire, tout élément de A^* est inversible, et A est un corps.

Exercice 2 : (2 pts) Soient I et J deux idéaux à gauche dans un anneau A . On pose $X = \{a \in A : aI \subseteq J\}$. Montrer que X est un idéal bilatère dans A .

Solution. On a $0 \in X$. Si $a, b \in X$, alors $(a - b)I \subseteq aI - bI \subseteq J + J = J$, donc $a - b \in X$ et X est un sous-groupe additif. Soit $a \in X$ et $b \in A$. Alors $baI \subseteq bJ \subseteq J$ et $abI \subseteq aI \subseteq J$. Ainsi $ba \in X$ et $ab \in X$, et X est un idéal bilatère.

Exercice 3 : (3 pts) Soit A un anneau commutatif unitaire, tel que pour tout $a \in A$ il y a un entier $n > 1$ avec $a^n = a$. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

(Indication : Si I est premier, considérer A/I comme sous-anneau de son corps des fractions.) **Solution.** Soit I un idéal premier. Alors $\bar{A} = A/I$ est un anneau intègre unitaire tel que pour tout $\bar{a} \in \bar{A}$ il y a $n > 1$ avec $\bar{a}^n = \bar{a}$. Donc $\bar{a}(\bar{1} - \bar{a}^{n-1}) = 0$. Alors soit $\bar{a} = 0$, soit $n = 2$ et $\bar{a} = 1$, soit $n = k + 2$ pour un $k \in \mathbb{N}$ et $\bar{1} = \bar{a} \bar{a}^k$. Ainsi $\bar{a}$ est inversible, et $\bar{A}$ est un corps. Donc I est maximal.

Alternative Soit K le corps des fractions de $\bar{A} = A/I$. Alors tout élément de $\bar{A}^* \subseteq K^\times$ est d'ordre multiplicatif fini, donc engendre un sous-groupe fini multiplicatif fini contenu dans $\bar{A}$, et est inversible dans $\bar{A}$. Ainsi $\bar{A} = K$ est un corps, et I est maximal.

Exercice 4 : (4 pts) Soit $A = \mathbb{Z}[i]$. Montrer que $A/(5)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Solution. On a $A \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$. Donc

$$A/(5) \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1, 5) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X^2 + 1) = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X - 2)(X - 3).$$

Mais $X - 2$ et $X - 3$ sont étrangers, puisque $(X - 2) - (X - 3) = 1$. D'après le théorème des restes chinois on a

$$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X - 2)(X - 3) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X - 2) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X - 3).$$

Mais eval_2 et eval_3 sont des homomorphismes $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X] \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ de noyau $(X - 2)$ et $(X - 3)$, respectivement. Ainsi $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X - 2) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X - 3) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, ce qui donne $A/(5) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Alternative. Un morphisme $f : \mathbb{Z}[i] \rightarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ doit envoyer 1 sur $(1, 1)$, et i sur $f(i) =: (a, b)$ avec

$$(a^2, b^2) = (a, b)^2 = f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = f(4) = 4f(1) = (4, 4),$$

donc (a, b) vaut $(2, 3)$ ou $(3, 2)$. (On a déjà

$$f(2) = 2f(1) = 2(1, 1) = (2, 2) \quad \text{et} \quad f(3) = 3f(1) = 3(1, 1) = (3, 3),$$

donc $f(i)$ est différent de $(2, 2)$ et de $(3, 3)$.) Puis on vérifié que cela induit un isomorphisme. Disons qu'on prend $f(i) = (2, 3)$. Alors $f(a + ib) = (a + 2b, a + 3b)$. Donc

$$\begin{aligned} f((a + ib) - (a' + ib')) &= f((a - a') + i(b - b')) = ((a - a') + 2(b - b'), (a - a') + 3(b - b')) \\ &= (a + 2b, a + 3b) - (a' + 2b', a' + 3b') = f(a + ib) - f(a' + ib'); \\ f((a + ib)(a' + ib')) &= f(aa' - bb' + i(ab' + a'b)) = (aa' - bb' + 2(ab' + a'b), aa' - bb' + 3(ab' + a'b)) \\ &= (a + 2b, a + 3b)(a' + 2b', a' + 3b') = f(a + ib)f(a' + ib'). \end{aligned}$$

Si $f(a + ib) = f(a' + ib')$, alors $a + 2b = a' + 2b'$ et $a + 3b = a' + 3b'$. Ceci donne $b = b'$, puis $a = a'$ et f est injectif. Mais $A/(5)$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ sont tous les deux de cardinal 25, une application injective est donc surjective. Ainsi f est une bijection qui préserve l'addition et la multiplication, donc un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 5 : Les polynômes suivants sont-ils irréductibles ?

1. $2X^5 - 10 \in A[X]$, dans les cas où :
 - (a) (1 pt) $A = \mathbb{Z}$,
 - (b) (1 pt) $A = \mathbb{Q}$,
 - (c) (1 pt) $A = \mathbb{R}$.
2. (1 pt) $X^3 + 3X^2 - 12X + 9 \in \mathbb{Q}[X]$.

Solution.

1. (a) Pour $A = \mathbb{Z}$ on a $2X^5 - 10 = 2(X^5 - 5)$, et aucun des deux facteurs n'est inversible. Ainsi $2X^5 - 10$ n'est pas irréductible.
- (b) Pour $A = \mathbb{Q}$ il suffit de considérer l'irréductibilité de $X^5 - 5$, puisque le contenu 2 est inversible. Mais $X^5 - 5$ satisfait au critère d'Eisenstein pour $p = 5$: 5 divise tous les coefficients sauf le coefficient dominant, et 5^2 ne divise pas le terme constant. Ainsi $X^5 - 5$ est irréductible dans $\mathbb{Q}$, et $2X^5 - 10$ aussi.
- (c) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}$ sont de degré 1 et 2. Donc $2X^5 - 10$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$.
2. La réduction donne $P \equiv X^3 + X^2 + 1 \pmod{2}$, ce qui n'a pas de racine et est irréductible dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, puisque $P(0) \equiv P(1) \equiv 1 \pmod{2}$. Ainsi P est irréductible sur $\mathbb{Z}$, donc sur $\mathbb{Q}$ puisque le contenu vaut 1.

Exercice 6 : Le but de cet exercice est de montrer que si A est un anneau commutatif unitaire noethérien, alors $A[X]$ est noethérien.

1. (2 pts) (Question de cours) Donner la définition d'un anneau commutatif noethérien.
2. Soit A un anneau commutatif unitaire noethérien et I un idéal de $A[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit

$$J_n = \{\text{cd}(P) : P \in I, \deg(P) = n\} \cup \{0\}$$

où $\text{cd}(P)$ est le coefficient dominant de P .

- (a) (1 pt) Montrer que J_n est un idéal de A .
- (b) (2 pts) Montrer que $J_n \subseteq J_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la suite $(J_n : n \in \mathbb{N})$ a un élément maximal J_p , pour un $p \in \mathbb{N}$.
- (c) (2 pts) Justifier que pour $n \leq p$ chaque J_n est engendré par un nombre fini d'éléments $a_{n,1}, \dots, a_{n,i_n}$.
- (d) (1 pt) Pour $n \leq p$ et $i \leq i_n$ on choisit $P_{n,i} \in I$ avec $\text{cd}(P_{n,i}) = a_{n,i}$ et $\deg(P_{n,i}) = n$. On pose $I' = (P_{n,i} : n \leq p, i \leq i_n)$. Justifier que $I' \subseteq I$.
- (e) (3 pts) Montrer par récurrence sur $\deg P$ que tout $p \in I$ est dans I' .
- (f) (1 pt) Conclure.

Solution.

1. Un anneau commutatif est noethérien s'il n'y a pas de chaîne $I_0 < I_1 < I_2 < \dots$ strictement croissante d'idéaux.
2. (a) $0 \in J_n$, donc J_n n'est pas vide. Si $a \neq a'$ sont dans J_n il y a des polynômes $P, Q \in I$ de degré n avec $\text{cd}(P) = a$ et $\text{cd}(Q) = a'$. Alors $\text{cd}(P - Q) = a - a'$ et $\deg(P - Q) = n$. Ainsi $a - a' \in J_n$, et J_n est un groupe additif. De plus, si $b \in A$ alors soit $ba = 0$, soit $ba \neq 0$ et $\text{cd}(bP) = ba$ et $\deg(bP) = n$. Dans les deux cas $ba \in J_n$. Ainsi J_n est un idéal.
- (b) Si $0 \neq a \in J_n$ et $P \in I$ avec $\text{cd}(P) = a$ et $\deg(P) = n$, alors $XP \in I$, $\deg(XP) = n + 1$ et $\text{cd}(XP) = a$. Ainsi $a \in J_{n+1}$, et $J_n \subseteq J_{n+1}$. Puisque A est noethérien, la chaîne croissante des J_n a un élément maximal, disons J_p .

- (c) D'après un théorème du cours, dans un anneau noethérien tout idéal est engendré par un nombre fini d'éléments. Parce que si J' était un idéal qui n'est pas finiment engendré, on pourrait construire une chaîne $J_0 < J'_1 < \dots$ strictement croissante d'idéaux finiment engendrés et contenus dans J' : On commence avec $J'_0 = (0)$; si on a construit $J_0 < J_1 < \dots < J_n$ tous finiment engendrés et contenues dans J' , alors $J_n < J'$ qui n'est pas finiment engendré. Donc il y a $a \in J' \setminus J_n$ et on pose $J_{n+1} = (J_n, a)$. Alors $J_n < J_{n+1} \leq J'$ et J_{n+1} est encore finiment engendré. Ceci contredit la noethérianité.
- (d) Puisque tous les $P_{n,i} \in I$ et $I' = (P_{n,i} : n \leq p, i \leq i_n)$, on a $I' \leq I$.
- (e) *Initialisation.* Si $\deg(P) = 0$, alors P est une constante et $cd(P) = P$. Ceci veut dire que $J_0 = \{P \in I : \deg(P) = 0\}$ et tout polynôme de I de degré 0 est dans $I' \geq (cd(P) : P \in I, \deg(P) = 0)$.
Hérédité. Supposons que tout polynôme de I de degré $\leq n$ est dans I' . Soit $P \in I$ avec $\deg(P) = n + 1$. Soit $m = \min\{n + 1, p\}$ et $k = \max\{n + 1 - p, 0\}$. Alors $cd(P) \in J_m$, et donc $cd(P) = \sum_{i \leq i_m} b_i a_{m,i}$ pour des $b_i \in A$. Soit $Q = \sum_{i \leq i_m} b_i X^k P_{m,i}$. Alors $Q \in I'$, $\deg(Q) = n + 1$ et $cd(Q) = cd(P)$. Donc $P - Q \in I$ avec $\deg(P - Q) \leq n$. Par hypothèse de récurrence $P - Q \in I'$. Alors $P = (P - Q) + Q \in I'$.
- (f) On vient de voir que $I = I'$. Ainsi I est finiment engendré ; puisque I était quelconque, tout idéal est finiment engendré. D'après le théorème du cours susmentionné, ceci implique que l'anneau est noethérien : Si $J'_0 < J'_1 < \dots$ était une chaîne strictement croissante, alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} J'_i = J'$ est un idéal, donc finiment engendré par des éléments $a_0, \dots, a_k$. Mais pour chaque $\ell \leq k$ il y a i_ℓ tel que $a_\ell \in J'_{i_\ell}$. Si $m = \max\{i_\ell : \ell \leq k\}$, alors $a_0, \dots, a_k \in J'_m$, ce qui implique

$$J = (a_0, \dots, a_k) \leq J'_m < J_{m+1} \leq J',$$

une contradiction.