Partiel

Mardi 18 mars 2025 — 9h45 – 11h15
Documents et calculettes interdits
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 : (2 pts) Montrer que tout anneau intègre unitaire possédant un nombre fini d'idéaux est un corps.
(Indication : Pour $x \neq 0, 1$ considérer les idéaux (x), (x^2), (x^3), etc.)

Exercice 2 : (2 pts) Soient I et J deux idéaux à gauche dans un anneau A. On pose $X = \{a \in A : aI \subseteq J\}$. Montrer que X est un idéal bilatère dans A.

Exercice 3 : (3 pts) Soit A un anneau commutatif unitaire, tel que pour tout $a \in A$ il y a un entier $n > 1$ avec $a^n = a$. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.
(Indication : Si I est premier, considérer A/I comme sous-anneau de son corps des fractions.)

Exercice 4 : (4 pts) Soit $A = \mathbb{Z}[i]$. Montrer que $A/(5)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Exercice 5 : Les polynômes suivants sont-ils irréductibles ?

1. $2X^5 - 10 \in A[X]$, dans les cas où :
   (a) (1 pt) $A = \mathbb{Z}$,
   (b) (1 pt) $A = \mathbb{Q}$,
   (c) (1 pt) $A = \mathbb{R}$.
2. (1 pt) $X^3 + 3X^2 - 12X + 9 \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 6 : Le but de cet exercice est de montrer que si A est un anneau commutatif unitaire noethérien, alors $A[X]$ est noethérien.

1. (2 pts) (Question de cours) Donner la définition d'un anneau commutatif noethérien.
2. Soit A un anneau commutatif unitaire noethérien et I un idéal de $A[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit

$$J_n = \{\mathrm{cd}(P) : P \in I, \deg(P) = n\} \cup \{0\}$$

   où $\mathrm{cd}(P)$ est le coefficient dominant de P.
   (a) (1 pt) Montrer que J_n est un idéal de A.
   (b) (2 pts) Montrer que $J_n \subseteq J_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la suite $(J_n : n \in \mathbb{N})$ a un élément maximal J_p, pour un $p \in \mathbb{N}$.
   (c) (2 pts) Justifier que pour $n \leq p$ chaque J_n est engendré par un nombre fini d'éléments $a_{n,1,}, \ldots, a_{n,i_n}$.
   (d) (1 pt) Pour $n \leq p$ et $i \leq i_n$ on choisit $P_{n,i} \in I$ avec $\mathrm{cd}(P_{n,i}) = a_{n,i}$ et $\deg(P_{n,i}) = n$. On pose $I' = (P_{n,i} : n \leq p,\, i \leq i_n)$. Justifier que $I' \subseteq I$.
   (e) (3 pts) Montrer par récurrence sur $\deg P$ que tout $p \in I$ est dans I'.
   (f) (1 pt) Conclure.