Feuille d'exercices n° 2: Fonctions holomorphes, conditions de Cauchy-Riemann

Terminologie. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction et $z_0 \in U$. On emploiera de façon équivalente les termes : f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, f est dérivable en z_0. Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on emploiera le terme f est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0. Ainsi, f est dérivable en z_0 ssi f est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 et satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann en z_0.

Exercice 1. Soient $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par $f(z) = \bar{z}$, $g(z) = \mathrm{Re}(z)$ et $h(z) = \mathrm{Im}(z)$. Montrer que ces fonctions ne sont dérivables en aucun point de $\mathbb{C}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ si $z \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann à l'origine mais que f n'est pas dérivable en ce point.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(x + iy) = x^3 + iy^3$. En quels points de $\mathbb{C}$ la fonction f est-elle dérivable ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction polynomiale associée à un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, exprimer $g'(z)$ en fonction de f.
2. Montrer que $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{f(z)}$ est dérivable en 0 ssi $f'(0) = 0$.

Exercice 5. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathbb{R}-$ différentiable sur l'ouvert $U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

1. Confirmer que f est dérivable en $z = x + iy$ ssi (x, y) est un point critique de f.
   (Un point (x, y) est dit *critique* si la différentielle $Df(x, y)$ est nulle.)
2. Soit U le plan $\mathbb{C}$ privé des axes réel et imaginaire.
   En quels points $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $g : U \to \mathbb{C} : x+iy \mapsto x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}$ sont-elles dérivables ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe. On note $\tilde{f}$ la fonction correspondante de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $f'(x + iy) \neq 0$, la différentielle $D\tilde{f}(x, y)$ est une similitude directe (i.e. composée d'une homothétie et d'une rotation).

Exercice 7. Soit U un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Démontrer que chacune des conditions suivantes implique que f est constante.

1. f' est nulle sur U.
2. $\mathrm{Re}(f)$ est constante.
3. $\mathrm{Im}(f)$ est constante.
4. $\overline{f}$ est holomorphe sur U.
5. $|f|$ est constante.

Exercice 8. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est anti-holomorphe sur U si la fonction $z \mapsto f(\bar{z})$ est holomorphe sur l'ouvert conjugué $\overline{U}$.

1. Montrer que f est holomorphe sur U ssi $\overline{f}$ est anti-holomorphe sur U.
2. Soit U un ouvert tel que $\overline{U} = U$ et soit g une fonction anti-holomorphe sur U. Montrer qu'il existe deux fonctions holomorphes f_1 et f_2 sur U telles que pour tout $z \in U$, $g(z) = \overline{f_1}(z) = f_2(\overline{z})$.

Exercice 9. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont harmoniques.
   (Une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite *harmonique* si $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.)
2. Soit U le demi-plan ouvert $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Montrer que la fonction $g : U \to \mathbb{R} : z \mapsto ln|z|$ est harmonique. Montrer (en l'explicitant) qu'il existe $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe sur U telle que $\mathrm{Re}(f) = g$.
3. On suppose à présent U étoilé. Démontrer que toute fonction g harmonique sur U est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U. (Considérer $h = \frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}$ et se servir d'une primitive.)

Pour s'entraîner :

Exercice 10.

1. Montrer que les équations de Cauchy–Riemann en polaires s'écrivent $\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$, où $g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
2. Soit P un polynôme non-constant, supposé sans zéro. On pose alors $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$. Montrer que $I'(r) = 0$. En déduire le théorème de d'Alembert–Gauss.

Suggestion : livre d'Elias Wegert ”Visual Complex Functions” (Springer 2012)