Lemme de factorisation. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $f \in H(\Omega)$*. Si* a *est un zéro d'ordre* $m \in \mathbb{N}$ *de* f*, alors il existe* $g \in H(\Omega)$ *telle que* $g(a) \neq 0$ *et* $\forall z \in \Omega : f(z) = (z-a)^m g(z)$*. Réciproquement, si cette factorisation existe alors* a *est un zéro d'ordre* m *de* f*.*

– preuve –

Supposons que a soit un zéro d'ordre m. On sait que pour tout entier $k < m \ : f^{(k)}(a) = 0$ et $f^{(m)}(a) \neq 0$. On pose $\forall z \in \Omega \backslash \{a\} \ \ g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-a)^m}$. On sait que f est analytique donc pour z proche de a on a : $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(z-a)^n}{n!} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(z-a)^n}{n!} = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+m)}(a)(z-a)^n}{(n+m)!}$
$\iff g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+m)}(a)(z-a)^n}{(n+m)!}$ pour tout z proche de a, ce qui tend vers $\dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}$ en a. On prolonge donc g en a par $g(a) = \dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}$. Ainsi g est holomorphe sauf peut être en a où elle est continue, donc par le théorème de Goursat, sur tout triangle $\Delta \subset \Omega \ \displaystyle\int_{\partial\Delta} g(z)dz = 0$ et donc par Morera g est holomorphe sur Ω tout entier.

Reciproquement si $\forall z \in \Omega \ \ f(z) = (z-a)^m g(z)$ avec g holomorphe qui ne s'annule pas en a, alors $\forall k < m$ par la formule de Leibniz : $\forall z \in \Omega \ f^k(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [(z-a)^m]^{(i)} g^{(k-i)}(z)$ et donc $f^k(a) = 0$ et $f^m(a) = g(a)m! \neq 0$ donc a est bien un zéro d'ordre m de f.