Preuve de D'Alembert-Gauss

Théorème : Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme non constant.

Supposons par l'absurde que $P(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

est entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$). Montrons alors que f est bornée.

Pour $|z|$ suffisamment grand, on a :

$$|P(z)| \geq \frac{|a_n|}{2}|z|^n$$

En effet, pour $|z| \geq R$ avec R assez grand :

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{R} + \cdots + \frac{|a_0|}{R^n} \leq \frac{|a_n|}{2}$$

D'où :

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{2}{|a_n||z|^n} \leq \frac{2}{|a_n|R^n}$$

Sur le compact $|z| \leq R$, f est continue donc bornée. Par le majestueux *théorème de Liouville*, $P(z)$ serait constant, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

La contradiction obtenue prouve l'existence d'au moins un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$.

$\square$