Proposition. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe.*
Il existe une détermination holomorphe du logarithme de f sur Ω si et seulement si $\dfrac{f'}{f}$ *admet une primitive dans Ω.*

Démonstration. Soit g une détermination holomorphe du logarithme de f.
On sait alors que g vérifie l'équation $\mathrm{e}^g = f$. En dérivant des deux côtés on obtient $g'\mathrm{e}^g = f'$, puis en divisant par e^g à gauche (ce qui est autorisé car l'exponentielle ne s'annule jamais), on a $g' = \dfrac{f'}{\mathrm{e}^g} = \dfrac{f'}{f}$.
Ce qui revient à dire que $\dfrac{f'}{f}$ admet g pour primitive.

Réciproquement, supposons que $\dfrac{f'}{f}$ admette une primitive g, (ie. $g' = \dfrac{f'}{f}$). On a aussi que $g + C$, où C est une constante complexe, est solution de la même équation. Par ailleurs, dire que $g + C$ est une détermination holomorphe du logarithme c'est écrire que $\mathrm{e}^{g+C} = f \iff 1 = f\mathrm{e}^{-(g+C)}$ (car l'exponentielle ne s'annule jamais).

Sur Ω connexe, il suffit donc que $\begin{cases} f\mathrm{e}^{-(g+C)} - 1 & = 0 \text{ en un point.} \\ \left[f\mathrm{e}^{-(g+C)}\right]' & = 0 \end{cases}$
On peut toujours trouver un C tel que si z_0 est fixé,

$$\begin{aligned} f(z_0)\mathrm{e}^{-(g(z_0)+C)} - 1 = 0 &\iff f(z_0)\mathrm{e}^{-(g(z_0)+C)} = 1 \\ &\iff f(z_0) = \mathrm{e}^{(g(z_0)+C)} \\ &\iff f(z_0) = \mathrm{e}^{g(z_0)}\mathrm{e}^C \\ &\iff f(z_0)\mathrm{e}^{-g(z_0)} = \mathrm{e}^C \in C^* \end{aligned}$$

Cette relation n'est vraie que si C est un logarithme complexe de $f(z_0)\mathrm{e}^{-g(z_0)}$. Ce qui est le cas puisque $f(z_0)\mathrm{e}^{-g(z_0)} \neq 0$.

On a de plus,

$$\begin{aligned} \left[f\mathrm{e}^{-(g+C)}\right]' &= \left[f\mathrm{e}^{-g}\mathrm{e}^{-C}\right]' \\ &= \mathrm{e}^{-C}\left[f\mathrm{e}^{-g}\right]' \\ &= \mathrm{e}^{-C}\left(f'\mathrm{e}^{-g} - fg'\mathrm{e}^{-g}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-C}\mathrm{e}^{-g}\left(f' - fg'\right) \\ &= \mathrm{e}^{-C}\mathrm{e}^{-g}f\left(\tfrac{f'}{f} - g'\right) = 0 \end{aligned}$$

Si Ω est connexe, on a donc que $f\mathrm{e}^{-(g+C)}$ est constante (car sa dérivée est nulle sur un ouvert connexe). Au point z_0, cette fonction vérifie $f(z_0)\mathrm{e}^{-(g(z_0)+C)} = 1$.
Donc, $\forall z \in \Omega, f(z)\mathrm{e}^{-g(z)+C} = 1 \iff f(z) = \mathrm{e}^{g(z)+C}$ [1]. Donc, $f = e^{g+C}$. Et on a bien une détermination holomorphe du logarithme de f.

Si maintenant Ω n'est pas connexe, on réitère notre opération sur chaque composante connexe comme ci-dessus.

□

1. La dérivée est nulle sur un ouvert connexe donc la fonction est constante. En un point elle vaut 1, donc la fonction vaut 1 partout. Voir la preuve sur la page suivante.

Proposition. *Une fonction continue localement constante sur un ouvert connexe est constante sur tout le connexe.*

Corollaire. *Une fonction $\mathbb{C}$-dérivable de dérivée nulle sur un ouvert connexe est constante sur tout le connexe.*

Démonstration. (du corollaire)
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{C}$-dérivable. Supposons que pour tout $z \in \Omega, f'(z) = 0$. Montrons alors que $\mathrm{D}_z f = 0, \forall z \in \Omega$.

En effet, la $\mathbb{C}$-dérivabilité de f permet d'écrire que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + \underset{h\to 0}{o}(1) \implies f(z+h) - f(z) = hf'(z) + \underset{h\to 0}{o}(h)$$
$$\implies f(z+h) = f(z) + \underset{h\to 0}{o}(h) \text{ (rappellons que } f'(z) = 0 \text{ pour tout z)}$$

Donc, $D_z f(h) = 0, \forall h$. Donc $D_z f = 0$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, et $x \in \Omega$ tel que $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset \Omega$. Soit $y \in \mathrm{B}(x, \varepsilon)$. On a $[x, y] \subset \mathrm{B}(x, \varepsilon)$. Par la démonstration précédente, $\mathrm{D}_z f = 0, \forall z \in \Omega$ donc en particulier pour tout $z \in [x, y]$. Donc par l'inégalité des accroissements finis, $|f(y) - f(x)| = 0 \implies f(y) = f(x), \forall y \in \mathrm{B}(x, \varepsilon)$. Ainsi, f est localement constante et f étant continue (car dérivable) sur un connexe, on en conclut que f est constante. □