démonstration 3

une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $z_0 \longleftrightarrow f$ est différentiable en z_0 et les équations de C-R y sont satisfaites

sens direct

f est C-dérivable en z_0 si

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

existe et est indépendante de la manière dont $h \to 0$ dans $\mathbb{C}$.
Posons $z = x+iy$ et $f(z) = u + iv$, où $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$ sont deux fonctions réelles à deux variables réelles.
Le taux d'acroissement $f(z_0+h) - f(z_0)/h$ doit avoir une limite indépendante de la direction de h.

On calcule en approchant selon les axes.

- h réel ($h = \Delta x$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0) + i\,[v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)]}{\Delta x} = u_x + iv_x$$

- h imaginaire pur ($h = i\Delta y$)

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) + i\,[v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)]}{i\Delta y} = v_y - iu_y$$

Pour que ces deux limites soient égales, il faut que $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ pourtant que les équations de Cauchy-Riemann soient satisfaites.

L'existance de la limite $h \to 0$ du quotient $f(z_0+h) - f(z_0)/h$ vient de la condition de C-dérivabilité sur f, et comme pour la $\mathbb{C}$-dérivabilité cette limite est indépendante de h, on peut bien approcher localement f par une fonction affine $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$, donc sur tout le plan complexe

sens réciproque

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est différentiable en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors on peut écrire

$$f(z_0+h) - f(z_0) = u_x h_1 + u_y h_2 + i\,(v_x h_1 + v_y h_2) + o(\sqrt{h_1^2+h_2^2})$$

avec $h = h_1 + ih_2$, $h_1 = \Delta x$, $h_2 = \Delta y$.
Avec les équations de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$, on obtient

$$f(z_0+h) - f(z_0) = v_y h_1 - v_x h_2 + i(v_x h_1 + v_y h_2) + o(|h|)$$

Factorisons :

$$f(z_0+h) - f(z_0) = (v_y + iv_x)(h_1 + ih_2) + o(|h|)$$

Si on divise par h et on considère la limite quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = v_y + iv_x \quad \text{indépendantment de } h$$

Alors cette limite existe pour tout point z_0 et donc on obtient la dérivabilité complexe, avec $f'(z_0) = v_y + i v_x$.