Démonstration 11

Groupe 74

19 février 2025

Démonstration de l'étape 2 du théorème de Montel

Montrons que pour chaque compact K $\subset \Omega$, $\mid f_n'(z) \mid \leq C_k$ $\forall$ z $\in$ K.
Fixons K compact dans Ω.
Comme z $\longmapsto dist(z, \delta\Omega)$ est continue. Elle atteint son minimum $r > 0$ sur le compact K.
Donc $\forall z \in K, D(z, \frac{r}{2}) \subset \Omega$.
Comme K est compact et comme $(D(z, \frac{r}{2}))_{z \in K} \subset \Omega$ forme un recouvrement ouvert de K , il éxiste un sous recouvrement fini $D(z^1, \frac{r}{2}), ..., D(z^n, \frac{r}{2})$ et $\tilde{K} = \bigcup_{i=1}^{n}(D(z^i, \frac{r}{2}))$ est un compact de Ω

Appliquons les inégalités de Cauchy pour z $\in K$,

$$|f_n'(z)| = \frac{|f_n^{(1)}(z)|}{1!} \leq \frac{1}{(\frac{r}{2})^1} \sup_{C(z, \frac{r}{2})} |f_n(z)| \leq \frac{2}{r} \sup_{\omega \in \tilde{K}} |f_n(\omega)| \leq C_{\tilde{K}}$$