Chapitre 1

Nombres complexes

1.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 1. *Un nombre complexe z est un point du plan cartésien. On note $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes.*

Exemple 2.
1. *On note $z = i$ le nombre complexe d'abscisse $x = 0$ et d'ordonnée $y = 1$*
2. *On identifie les nombres réels avec l'axe des abscisses et on note $z = x \in \mathbf{R}$ dans ce cas*
3. *Les nombres imaginaires forment l'axe des ordonnées. Tout nombre imaginaire est un multiple réel de i, c'est-à-dire $z = iy$, où $y \in \mathbf{R}$.*
4. *Tout nombre complexe s'écrit de façon unique $z = x+iy$, où (x, y) sont les coordonnées cartésiennes de z. On dit aussi que $x = \Re(z)$ est la partie réelle de z et $y = \Im(z)$, sa partie imaginaire.*

Définition 3. *A tout nombre complexe z, on associe son conjugué $\bar{z}$, qui est son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi $\bar{z} = x - iy$ si (x, y) sont les coordonnées cartésiennes de z.*

1.2 Coordonnées polaires

Définition 4.
1. *Le module de $z \in \mathbf{C}$ est sa distance à l'origine, notée $r = |z|$.*
2. *Un argument de $z \in \mathbf{C}$ est la mesure d'un angle (orienté dans le sens trigonométrique) entre les demi-droites $\mathbf{R}_+$ et $[Oz)$. On note $\theta = \arg(z)$. Deux arguments de z sont congrus modulo 2π.*
3. *L'argument principal de $z \in \mathbf{C}$ est l'unique argument de z appartenant à $]-\pi, \pi]$. On note $\theta = \operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$*
4. *On dit que (r, θ) sont des coordonnées polaires de z si r est son module et θ un de ses arguments. On note $z = re^{i\theta}$.*

Exemple 5. $i = e^{i\pi/2}, -1 = e^{i\pi}, 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

Remarque 6. *Le module définit une norme sur $\mathbf{C}$. Ainsi équipé, $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé complet (espace de Banach) de dimension 2. La distance euclidienne entre deux points est donnée par $d(z, z') = |z - z'|$.*

Proposition 7. *Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,*
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Le résultat suivant est utile pour convertir les coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires et vice-versa.

Corollaire 8. *Soient $r \in \mathbf{R}_+$, $\theta \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ et $z = re^{i\theta} = x + iy$.*
1. $(x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$
2. *Réciproquement, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et si $r \neq 0$, θ vérifie $(\cos\theta, \sin\theta) = (x/r, y/r)$. En particulier, si $x > 0$, $\theta = \arctan(y/x)$ est l'argument principal de z.*

1.3 Opérations sur les nombres complexes

Définition 9. *1. La somme de deux nombres complexes est définie par la règle du parallélogramme. En coordonnées cartésiennes, on obtient*

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

2. Le produit d'un nombre complexe par un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ est son image par l'homothétie de rapport λ. En coordonnées cartésiennes, on obtient

$$\lambda z = (\lambda x) + i(\lambda y)$$

3. Le produit de deux nombres complexes est défini en coordonnées polaires par

$$zz' = (re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

Remarque 10. *1. Si on veut multiplier un nombre complexe par un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ et exprimer le résultat en coordonnées polaires, on a $\lambda z = \lambda re^{i\theta}$ si $\lambda \geq 0$, mais $\lambda z = |\lambda| re^{i(\theta+\pi)}$ si $\lambda < 0$.*

2. Le produit zz' est bien défini, car il ne dépend pas du choix des arguments θ et θ'

On a le résultat fondamental suivant :

Théorème 11.

$$i^2 = -1$$

Démonstration.

$$i^2 = i \cdot i = e^{i\pi/2} \cdot e^{i\pi/2} = e^{i\pi} = -1$$

□

Enfin, comme

Proposition 12. *1. La multiplication est distributive par rapport à l'addition :*

$$(z + z')z'' = zz'' + z'z''$$

2. Tout nombre complexe non nul $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ admet un inverse pour la multiplication, donné en coordonnées polaires par $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

on déduit facilement que le produit de deux nombres complexes s'exprime en coordonnées cartésiennes à l'aide de la formule

$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

On peut exprimer module, partie réelle et imaginaire à l'aide du couple $(z, \bar{z})$:

Proposition 13. *Soit $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ et $z = x + iy$. Alors,*

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

1.4 La sphère de Riemann

Définition 14. *On appelle sphère de Riemann l'espace topologique $\hat{\mathbf{C}}$ obtenu en ajoutant un point ∞ à $\mathbf{C}$ et une base de voisinages de ∞, formée des complémentaires dans $\hat{\mathbf{C}}$ des compacts de $\mathbf{C}$ (et une base de voisinage d'un point $a \in \mathbf{C}$, formée des disques $D(a, 2^{-n})$, $n \in \mathbf{N}^*$).*

$\hat{\mathbf{C}}$ est homéomorphe à la sphère unité S^2 de $\mathbf{R}^3$, donc compact, car la projection stéréographique $\pi : S^2 \to \hat{\mathbf{C}}$ de pôle le pôle nord $N = (0, 0, 1)$ définie par

$$\pi(p) = \frac{1}{1 - p_3}(p_1 + ip_2), \quad \text{si } p = (p_1, p_2, p_3) \neq N$$

et par $\pi(N) = \infty$, est une bijection continue de S^2 sur $\hat{\mathbf{C}}$.
On étend les opérations sur les nombres complexes à l'aide des formules

$$\infty + z = z + \infty = \infty \text{ pour } z \in \hat{\mathbf{C}}, \quad \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty \text{ pour } z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\} \quad \text{et } \infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 1.$$

Chapitre 2

Fonctions holomorphes

2.1 Définition et premières propriétés

Dans toute la suite du cours, la lettre Ω désigne un ouvert de $\mathbf{C}$.

Définition 15. *Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction.*

1. *f est $\mathbf{C}$-dérivable au point $z \in \Omega$ si la limite*
$$\lim_{h \in \mathbf{C}^*, w \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$
existe. On note alors $f'(z)$ cette limite.
2. *f est holomorphe si f est $\mathbf{C}$-dérivable en tout point $z \in \Omega$.*
3. *f est entière si de plus $\Omega = \mathbf{C}$.*

On a les règles de calcul usuel (par les mêmes preuves)

Proposition 16. *Soient $f, g : \Omega \to \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes définies sur le même ouvert, $\lambda \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$. Alors, en supposant que g ne s'annule pas au point considéré pour la règle du quotient,*
$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (f^n)' = nf^{n-1}f'$$
Enfin si h est définie au voisinage de $f(z)$ et $\mathbf{C}$-dérivable en ce point, on a aussi
$$(h \circ f)'(z) = h'(f(z))f'(z)$$

Exemple 17. *Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $z \mapsto z^n$ est entière. Tout polynôme l'est donc aussi. $1/z$ est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$*

Faisons à présent le lien avec le cours de calcul différentiel, au travers des équations de Cauchy-Riemann.

Théorème 18. *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $P, Q : \Omega \to \mathbf{R}$ deux fonctions à valeurs réelles et $f = P + iQ$. Soit $z \in \Omega$. f est $\mathbf{C}$-dérivable au point z si et seulement si f est différentiable en ce point et si les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites :*
$$\frac{\partial P}{\partial x}(z) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(z) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z)$$
ou de façon équivalente $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z)$.

Démonstration. Dire que $f'(z)$ est limite du taux d'accroissement de f est équivalent à écrire que
$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(|h|), \quad \text{lorsque } h \to 0,$$

ce qui équivaut à dire que f est différentiable et que sa différentielle agit par multiplication d'un nomrbe complexe $f'(z)$ i.e.

$$D_z f(h) = f'(z)h \quad \text{pour tout } h \in \mathbf{C}$$

Pour que cette dernière égalité soit vérifiée, il faut et il suffit qu'elle le soit pour $h = 1$ et $h = i$ (car $(1, i)$ est une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$). Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = f'(z)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = f'(z)i$ d'où

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z).$$

En séparant partie réelle P et la partie imaginaire Q de f, les équations sur les dérivées partielles de P et Q s'en suivent. □

Exemple 19. *La fonction $f(z) = |z|^2$ est $\mathbf{C}$ dérivable seulement en $z = 0$. La fonction $f(z) = x^2 + iy^2$ est $\mathbf{C}$ dérivable uniquement sur la droite $(1+i)\mathbf{R}$. Aucune de ces deux fonctions n'est donc holomorphe.*

Corollaire 20. *Soit Ω un ouvert connexe et $f : \Omega \to \mathbf{C}$ holomorphe de dérivée nulle. Alors, f est constante.*

Définition 21. *Une primitive d'une fonction $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe $F : \Omega \to \mathbf{C}$ solution de l'équation*

$$F' = g$$

Se pose la question de savoir sous quelle condition une fonction admet une primitive en ce sens.

2.2 Les sommes de séries entières

Définition 22. *Une série entière est une série formelle de la forme $\sum a_n z^n$, où $a_n \in \mathbf{C}$ et $z \in \mathbf{C}$. Son rayon de convergence est le nombre $R \in [0, +\infty]$ éventuellement nul ou infini, défini par*

$$R = \sup\{r \geq 0 \ : \ \textit{la suite } (|a_n|r^n)_{n\in\mathbf{N}} \textit{ est bornée}\}$$

Dans la suite, on notera $D(0, R) \subset \mathbf{C}$ le disque ouvert centré en 0 et de rayon R si $R \in]0, +\infty[$ (resp. $\mathbf{C}$ tout entier si $R = +\infty$). Le disque fermé sera noté $\overline{D(0, R)}$.

Théorème 23. *Supposons $R > 0$.*

1. *Pour tout $r \in]0, R[$, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement dans le disque $\overline{D(0, r)}$. En particulier, sa somme*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est définie et continue en tout point $z \in D(0, R)$.

2. *Pour $|z| = R$, la nature de la série est indéterminée.*
3. *Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \overline{D(0, R)}$, la série diverge grossièrement.*

Démonstration. Le point 2 ne nécessite pas de démonstration et le point 3 est laissé en exercice. Pour le point 1, fixons $r' \in]r, R[$ tel que la suite $(|a_n|(r')^n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée et notons M un majorant. Alors, pour $z \in \overline{D(0, r)}$,

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n = |a_n|(r')^n \left(\frac{r}{r'}\right)^n \leq M q^n,$$

où $q = r/r' < 1$ et donc la série géométrique de terme général q^n converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0, r)}$. □

Le critère de Cauchy est un moyen pratique de calculer le rayon de convergence d'une série entière.

Théorème. *Avec la convention d'écriture $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est donné par*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Démonstration. Notons $\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$ et montrons que $R = R'$. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $b_n = \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k}$. Par définition de la limsup, la suite (b_n) converge vers $\frac{1}{R'}$. Si $r < R'$, alors $1/r > 1/R'$ et donc $1/r > b_n \geq |a_k|^{1/k}$ pour n assez grand et $k \geq n$. On en déduit que la suite $(|a_k|r^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée et donc que $R' \leq R$. Réciproquement, si $r > R'$, il existe $r > r' > R'$ d'où $1/r' < 1/R'$. On a cette fois $1/r' < |a_{k_n}|^{1/k_n}$ pour tout n assez grand et au moins un $k_n \geq n$. Ceci entraine que $|a_{k_n}|r^{k_n} > (r/r')^{k_n}$: comme $q = r/r' > 1$, la suite $(|a_k|r^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est non bornée et $R' \geq R$. □

Le lien avec les fonctions holomorphes est donnée par le résultat suivant.

Théorème 24. *Supposons $R > 0$. Alors, S est holomorphe. De plus, pour $z \in D(0,R)$,*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Démonstration.

1. Commençons par vérifier que la série $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ a bien pour rayon de convergence R. En effet, si $r < R$ et $r' \in]r, R[$, alors la suite $(|a_n|(r')^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée (par M) et donc, en travaillant comme dans la preuve précédente et en notant $q = r/r' < 1$,

$$(n+1)|a_{n+1}|r^n \leq (n+1)\frac{M}{r'}q^n \leq M',$$

où la dernière inégalité se déduit par croissance comparée.

2. Soit $z \in D(0,R)$, r tel que $|z| < r < R$ et $\rho = R - r < r$. Pour $h \in D(0,\rho)$, $h \neq 0$, posons

$$u_n(h) = a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}$$

et $u_n(0) = a_n n z^{n-1}$. Par la formule du binôme de Newton, il vient

$$|u_n(h)| \leq \left| a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k h^{n-1-k} \right| \leq |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} r^k r^{n-1-k} = n|a_n|r^{n-1}$$

D'après la première étape, on déduit que $\sum u_n(h)$ converge normalement sur $D(0,\rho)$. En particulier, cette somme est continue en 0 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = S'(z)$$

□

En appliquant ce théorème à la série entière dont S' est la somme, on conclut que S' est elle-même holomorphe. En réitérant cette idée, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 25. *S est infiniment $\mathbf{C}$-dérivable. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$*

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

Démonstration. Par une récurrence immédiate, on a

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

En particulier, pour $z = 0$, tous les termes de la somme se simplifient sauf le premier et

$$S^{(k)}(z) = k!a_k.$$

□

Fin du cours du 20/01/2025

On peut commodément ajouter et multiplier les série entières, mais il faut faire attention aux rayons de convergence.

Proposition 26. *Soient $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_1 resp. R_2 et de somme S_1 resp. S_2.*

1. *La série $\sum c_n z^n$, où $c_n = a_n + b_n$, a pour rayon de convergence $R_3 \geq \min(R_1, R_2)$ (et si $R_1 \neq R_2$, $R_3 = \min(R_1, R_2)$). De plus, pour $z \in D(0, R_3)$, sa somme S_3 est donnée par*
$$S_3(z) = S_1(z) + S_2(z)$$
2. *La série $\sum c_n z^n$, où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, a pour rayon de convergence $R_3 \geq \min(R_1, R_2)$. De plus, pour $z \in D(0, R_3)$, sa somme S_3 est donnée par*
$$S_3(z) = S_1(z) S_2(z)$$

Remarque 27. *Dans le cas d'un produit, si $R_1 \neq R_2$, on ne peut pas conclure que $R_3 = \min(R_1, R_2)$. Exemple : $\sum a_n z^n = 1 - z$ et $\sum b_n z^n = \sum z^n$.*

2.3 L'exponentielle complexe et les fonctions trigonométriques

Définition 28. *Pour $z \in \mathbf{C}$, on définit*
$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Remarque 29. *Au premier chapitre, nous avons utilisé la notation $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbf{R}$, pour désigner le nombre complexe unimodulaire dont θ est un argument. Cette notation est consistante avec la définition de l'exponentielle complexe.*

On a les propriétés élémentaires suivantes

Proposition 30. *Soient $x, y \in \mathbf{R}$, $z = x + iy \in \mathbf{C}$ et $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.*

1. *e^z s'écrit en coordonnées polaires sous la forme $e^z = e^x e^{iy}$. En particulier, l'exponentielle complexe ne s'annule jamais et elle est $2i\pi$ périodique.*
2. *$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$*
3. *L'exponentielle est une fonction entière et $(e^z)' = e^z$*

A partir de la fonction exponentielle, on étend aisément la définition des fonctions trigonométriques par

Définition 31. *Soit $z \in \mathbf{C}$.*
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

De sorte que ces fonctions sont entières et que restent valables les développements en série entière,
$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
les formules de dérivation
$$\cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos, \quad \cosh' = \sinh, \quad \sinh' = \cosh$$
et les formules de trigonométrie usuelles.

Proposition 32. $\cos(z) = 0$ *si et seulement si* $z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$. $\cosh(z)$ *si et seulement si* $z \in i(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z})$.

Il s'ensuit que les fonctions
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$
sont bien définies et holomorphes sur les ouverts $\mathbf{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z})$ et $\mathbf{C} \setminus i(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z})$ respectivement. On a alors
$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}, \quad \tanh' = 1 - \tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2}$$

2.4 Les logarithmes complexes

Définition 33. *Soit $z \in \mathbf{C}^*$. Un logarithme de z est une solution $w \in \mathbf{C}$ de l'équation*

$$e^w = z$$

On note alors $w = \log(z)$.

Remarque 34.
1. *0 n'admet pas de logarithme, car l'exponentielle ne s'annule pas*
2. *Tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ admet des logarithmes et*
$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$
3. *en particulier, deux logarithmes de z différent d'un multiple entier de $2i\pi$*

Parmi tous ces logarithmes, comment en déterminer un, $w = f(z)$, qui soit holomorphe ? Sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, il n'en existe pas comme on le verra plus tard. On peut tout de même tenter de chercher une détermination holomorphe sur un ouvert Ω donné. il suffit pour cela de déterminer un argument continu :

Proposition 35. *Soit $\Omega \subset \mathbf{C} \setminus \{0\}$. $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est une détermination holomorphe du logarithme si et seulement si elle est continue.*

Dans le plan fendu $\Omega = P_{\theta_0} = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+ e^{i\theta_0}$, où $\theta_0 \in \mathbf{R}$, l'argument vérifiant $\arg z \in]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ est continu, ce qui permet de définir un logarithme holomorphe dans P_{θ_0}. Le cas $\theta_0 = \pi$ donne la définition suivante

Définition 36. *On appelle détermination principale du logarithme l'application définie sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ par*

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z),$$

où $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi, \pi[$ est l'argument principal de z.

Attention, on a seulement

Proposition 37.
$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) \equiv \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) \pmod{2i\pi}$$

Si $\log(z)$ est une détermination holomorphe du logarithme sur un ouvert Ω, on peut définir pour $\alpha \in \mathbf{C}$, la puissance complexe (holomorphe)
$$z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$$
sur le même ouvert. Mais, l'égalité entre $(z_1 z_2)^\alpha$ et $z_1^\alpha z_2^\alpha$ ne sera pas vraie en général.
Plus généralement, on peut s'intéresser au logarithme d'une fonction.

Définition 38. *Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}^*$ une fonction holomorphe. Si elle existe, une détermination holomorphe du logarithme de f est une fonction holomorphe $g : \Omega \to \mathbf{C}$ solution de*

$$e^g = f$$

Proposition 39. *Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}^*$ une fonction holomorphe.*
1. *Si g est une détermination holomorphe de $\log f$, alors $g' = \frac{f'}{f}$*
2. *Il existe une détermination holomorphe de $\log f$ dans Ω si et seulement si f'/f admet une primitive dans Ω.*

En particulier,
1. La dérivée d'une détermination holomorphe de $\log z$ est toujours $1/z$.
2. il existe une détermination holomorphe de $\log z$ dans Ω si et seulement si $1/z$ admet une primitive dans Ω.

Proposition 40. *Pour $z \in D(0,1)$,*

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

Chapitre 3

Formules de Cauchy

3.1 Intégration complexe

3.1.1 Lacets

Définition 41. *Un chemin est une fonction continue* $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$. *Son origine est* $\gamma(a)$*, son extrémité* $\gamma(b)$. *Son support (ou image) est l'ensemble* $\Gamma = \gamma([a, b])$.

1. *Si* $\gamma(a) = \gamma(b)$*, on dit que le chemin est un lacet*
2. *Si de plus* $\gamma|_{[a,b[}$ *est injectif, on dit que le lacet est simple*

Exemple 42.
1. *Le cercle unité* $\partial D(0, 1)$*, parcouru dans le sens direct, est le support du lacet simple* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ *défini par* $\gamma(t) = e^{it}$.
2. *La lemniscate de Bernouilli* $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbf{C}$, $\gamma(t) = \frac{\sqrt{2}\sin t}{1+\cos^2 t}(1 + i\cos t)$ *est un lacet qui n'est pas simple.*

On suppose désormais tous les chemins de classe C^1 par morceaux et on note $\gamma'(t)$ la dérivée à droite de γ au point $t \in [a, b[$.

Définition 43.
1. *Soient* $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$. *On dit* $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ *est une reparamétrisation de* γ *qui préserve l'orientation s'il existe un diiféomorphisme de classe* C^1 $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *croissant tel que* $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. *En particulier, les deux chemins ont même support et sont parcourus dans le même sens. On dira qu'ils sont équivalents.*
2. *Le chemin parcouru dans le sens opposé à* γ *est le chemin* $\gamma_- : [a, b] \to \mathbf{C}$ *donné par* $\gamma_-(s) = \gamma(a + b - s)$.
3. *Soit* γ_2 *un chemin ayant pour origine l'extrémité du chemin* γ_1. *Quitte à reparamétrer, on peut suppose que* γ_1 *est défini sur* $[0, 1]$ *et* γ_2 *sur* $[1, 2]$. *On définit alors l'union* $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ *par*

$$\gamma : [0, 2] \to \mathbf{C} \qquad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & si\ t \in [0, 1], \\ \gamma_2(t) & si\ t \in [1, 2] \end{cases}$$

Fin du cours du 27/01/2025 (jusqu'au point 1 de la définition uniquement)

Définition 44. *La longeur d'un chemin* $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ *est donnée par*

$$\mathrm{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

3.1.2 Intégrale complexe

Définition 45. *Soit* f *une fonction complexe définie et continue sur le support d'un chemin* $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$. *L'intégrale de* f *le long du chemin* γ *est le nombre complexe*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Remarque 46. *Notons que l'intégrale est linéaire en f, ne dépend pas du paramétrage de γ, mais dépend en revanche de son sens :*

$$\int_{\gamma_-} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$$

En pratique, on ne donne d'un chemin que son image et son sens de parcours (par défaut le sens direct, s'il n'est pas précisé). Pour calculer une intégrale complexe, la proposition suivante s'avère bien utile.

Proposition 47.
1. *Si f admet une primitive F dans Ω et γ un chemin dont le support est inclus dans Ω, alors $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. Si de plus γ est un lacet, $\int_\gamma f(z)dz = 0$*
2. $\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$

En particulier, pour tout polynôme P et tout lacet γ, $\int_\gamma P(z)dz = 0$. Si on veut à présent estimer une intégrale complexe, on a les résultats suivants.

Proposition 48.
1. $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \mathrm{long}(\gamma) \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|$
2. *Si (f_n) converge uniformément vers f, $\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$*
3. *Si $\Gamma \subset D(0,R)$, où $R > 0$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, alors*

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\gamma a_n z^n \, dz.$$

Exemple 49. *Soit $n \in \mathbf{Z}$.*

$$\int_{C(0,1)} z^n dz = \begin{cases} 0 & si\ n \neq -1, \\ 2i\pi & si\ n = -1. \end{cases}$$

3.1.3 Indice d'un point par rapport à un lacet

Définition 50. *Soit γ un lacet et $z_0 \notin \Gamma$. un point n'appartenant pas à son support. L'indice du point z_0 par rapport à γ est le nombre*

$$\mathrm{Ind}(z_0, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$$

Remarque 51. *Supposons pour simplifier que $z_0 = 0$ et écrivons le chemin γ en coordonnées polaires*

$$\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$$

Si γ est de classe C^1, son module r l'est aussi. Si on peut trouver un argument θ lui aussi C^1, alors

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{r'}{r} + i\theta'$$

d'où il résulte que

$$\mathrm{Ind}(0, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \left(\theta(b) - \theta(a)\right).$$

Autrement dit, l'indice mesure le nombre de tours effectués par le lacet γ autour de $z_0 = 0$ (comptés positivement dans le sens direct et négativement dans le sens rétrograde). On peut l'évaluer graphiquement en fixant une demi-droite d'origine z_0 et en comptant $+1$ à chaque fois que la courbe croise la demi-droite dans le sens direct et -1 lorsque le croisement a lien dans le sens rétrograde, puis en faisant la somme de ces signes.

Définition 52. *Un lacet simple est dit orienté dans le sens direct si l'indice d'un point situé à l'intérieur du lacet est égal à 1.*

Proposition 53. *Soit γ un lacet et $z_0 \notin \Gamma$.*
1. *L'indice est toujours un entier :* $\mathrm{Ind}(z_0, \gamma) \in \mathbf{Z}$
2. *L'indice est constant sur chaque composante connexe de* $\mathbf{C} \setminus \Gamma$
3. *L'indice est nul sur la composante connexe non bornée de* $\mathbf{C} \setminus \Gamma$

3.2 Formules de Cauchy et applications

On a vu qu'une fonction de la variable complexe admettant une primitive dans un ouvert Ω (une hypothèse de nature globale) a son intégrale nulle le long de tout lacet de support inclus dans Ω. De façon étonnante, cette propriété reste valable pour les fonctions holomorphes (une hypothèse de nature locale), au moins pour certains lacets :

Théorème 54 (Goursat)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $\triangle$ un triangle (plein) inclus dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω (sauf éventuellement en un point, où elle est continue). Alors,*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$$

$\boxed{\text{Fin du cours du 03/02/2025}}$

Le théorème de Goursat se généralise au cas d'un lacet arbitraire de support inclus dans un ouvert *étoilé*.

Définition 55. *Un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ est étoilé au point $a \in \Omega$ si pour tout $z \in \Omega$, on a $[a, z] \subset \Omega$.*

Exemple 56. *Un disque est étoilé, la composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus \Gamma$, où Γ est le support de $\gamma(t) = 4e^{it} + e^{-4it}$, $t \in [0, 2\pi]$, l'est aussi. Un anneau n'est pas étoilé, $\mathbf{C}^*$ non plus.*

Théorème 57 (Cauchy)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert étoilé, γ un lacet de support inclus dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω (sauf éventuellement en un point, où elle est continue). Alors, f admet une primitive dans Ω et donc f est holomorphe dans Ω tout entier et*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Remarque 58. *Notons que l'hypothèse Ω étoilé ne peut être retirée dans le théorème de Cauchy. En effet, si $\Omega = \mathbf{C}^*$, $f(z) = 1/z$ et γ le cercle unité centré à l'origine, $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi$, d'après l'exemple 49.*

A l'aide du théorème de Cauchy, on obtient facilement la formule de représentation intégrale fondamentale suivante :

Théorème 59 (formule de Cauchy)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert étoilé, γ un lacet de support inclus dans Ω, f une fonction holomorphe sur Ω et $z \in \Omega \setminus \Gamma$. Alors,*

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Remarque 60. *Dans la formule de Cauchy, la dépendance à z du membre de droite est explicite. On en tire avantage dans la preuve du corollaire suivant pour montrer que f est développable en série entière au voisinage de tout point et donc holomorphe dans Ω tout entier, y compris au point où on l'avait supposée juste continue.*

Corollaire 61 (formules de Cauchy)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors, f admet des dérivées de tous ordres. Si de plus Ω est étoilé, γ est un lacet inclus dans Ω et $z \in \Omega \setminus \Gamma$, alors*

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z)\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Voyons à présent d'utiles conséquences de ces formules intégrales. Dans le cas d'un cercle, on déduit la formule de la moyenne suivante :

Corollaire 62 (formule de la moyenne)**.** *Soit f holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$. Alors,*

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + re^{2i\pi t})dt$$

On déduit également des formules de Cauchy les inégalités suivantes

Corollaire 63 (inégalités de Cauchy). *Soit f holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D(z_0,r)}$. Alors,*

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{1}{r^n} \sup_{C(z_0,r)} |f|$$

D'où il suit que

Théorème 64 (Liouville). *Toute fonction entière bornée est constante.*

et donc que

Théorème 65 (d'Alembert-Gauss). *Tout polynôme non constant admet une racine complexe*

Le théorème de Goursat admet une réciproque :

Théorème 66 (Morera). *Soit f une fonction continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$. Si pour tout triangle (plein) Δ contenu dans Ω on a $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$, alors f est holomorphe sur Ω.*

On peut aussi caractériser les fonctions primitivables :

Théorème 67. *Soit f une fonction continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$. Si $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour tout lacet γ de support contenu dans Ω, alors f admet une primitive dans Ω.*

En particulier, on peut caractériser les ouverts pour lesquels une détermination holomorphe du logarithme existe.

Corollaire 68. *Soit Ω un ouvert qui ne contient pas 0. Il existe une détermination holomorphe du logarithme dans Ω si et seulement si $\mathrm{Ind}(0,\gamma) = 0$ pour tout lacet γ de support contenu dans Ω.*

Proposition 69. *Si Ω est étoilé et f holomorphe sur Ω ne s'annule pas, alors il existe une détermination holomorphe du logarithme de f dans Ω.*

Chapitre 4

Fonctions analytiques

4.1 Holomorphie et analyticité

Les fonctions analytiques sont les fonctions s'exprimant localement comme des sommes de séries entières :

Définition 70. *Une fonction $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est analytique au point $z_0 \in \Omega$ s'il existe une série entière de rayon de convergence non nul telle que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

au voisinage de z_0.

On peut résumer les résultats établis aux chapitre 2 et 3 à l'aide la proposition suivante.

Proposition 71. *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ et $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Il y a équivalence entre*

1. *f est holomorphe*
2. *pour tout triangle plein $\Delta \subset \Omega$, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$*
3. *pour tout disque $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ et tout point $z \in D(a,r)$, on a la formule de Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

4. *f est analytique*

Les deux assertions suivantes sont équivalentes et impliquent les précédentes

5. *pour tout lacet γ de support inclus dans Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0$*
6. *f admet une primitive dans Ω*

Elles leur sont aussi équivalentes si Ω est étoilé.

On en déduit le théorème de dérivation sous le signe intégral suivant :

Théorème 72. *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert, I un intervalle compact de $\mathbf{R}$ et $\varphi : \Omega \times I \to \mathbf{C}$ une fonction continue telle que pour tout $t \in I$, la fonction $z \mapsto \varphi(z,t)$ soit holomorphe. Alors, la fonction*

$$z \mapsto f(z) = \int_I \varphi(z,t)dt$$

est holomorphe et

$$f'(z) = \int_I \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z,t)dt$$

Démonstration. Soit $\triangle$ un triangle plein inclus dans Ω. Comme φ est continue sur le compact $\partial\triangle \times I$, φ y est intégrable et le théorème de Fubini s'applique :

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \int_{\partial\triangle} \left(\int_I \varphi(z,t)dt\right) dz = \int_I \left(\int_{\partial\triangle} \varphi(z,t)dz\right) dt$$

Or, pour $t \in I$ fixé, $z \mapsto \varphi(z,t)$ est holomorphe. Il résulte du théorème de Goursat que

$$\int_{\partial\triangle} \varphi(z,t)dz = 0$$

et donc que $\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$. Par le théorème de Morera, on déduit que f est holomorphe dans Ω. De plus, par la formule de Cauchy appliquée dans l'ouvert étoilé $D(z,2r)$, où $z \in \Omega$ est fixé et $r > 0$ est choisi tel que $D(z,2r) \subset \Omega$, on a

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \left(\int_I \frac{\varphi(w,t)}{(w-z)^2} dt\right) dw$$

L'intégrande étant continu sur le compact $C(z,r) \times I$ donc intégrable, le théorème de Fubini s'applique encore. Et comme à $t \in I$ fixé, $z \mapsto \varphi(z,t)$ est holomorphe, la formule de Cauchy s'applique :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{\varphi(w,t)}{(w-z)^2} dw$$

Ainsi,

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_I \left(\int_{C(z,r)} \frac{\varphi(w,t)}{(w-z)^2} dw\right) dt = \int_I \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t)dt$$

□

Fin du cours du 10/02/2025
mais aussi

Théorème 73. *Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n : \Omega \to \mathbf{C}$ holomorphe. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur chaque compact $K \subset \Omega$, alors f est holomorphe.*

En munissant l'espace des fonctions holomorphes $H(\Omega)$ de la distance

$$d(f,g) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} \frac{\sup_{z\in K_p} |f(z)-g(z)|}{1+\sup_{z\in K_p} |f(z)-g(z)|}$$

où (K_p) est une famille exhaustive de compacts de Ω, nous venons d'établir que $H(\Omega)$ est complet. On a en fait le résultat de compacité plus fort suivant

Théorème 74 (Montel)**.** *Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n : \Omega \to \mathbf{C}$ holomorphe. Si pour chaque compact $K \subset \Omega$, la suite (f_n) est bornée sur K, alors une suite extraite $(f_{\psi(n)})$ converge uniformément sur chaque compact K vers une fonction holomorphe f. Autrement dit, les parties compactes de $H(\Omega)$ sont les parties fermées et bornées.*

Ce résultat est remarquable car $H(\Omega)$ est un espace de dimension infinie (mais attention, ce n'est pas un espace de Banach).

4.2 Principe des zéros isolés

Proposition 75. *Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ holomorphe sur l'ouvert connexe Ω et $a \in \Omega$. Si f, ainsi que toutes ses dérivées s'annulent en a, alors f est identiquement nulle.*

Définition 76. *Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ holomorphe et $a \in \Omega$ un zéro de f. L'ordre (ou multiplicité) de a est le plus petit entier $m \in \mathbf{N}$ tel que $f^{(m)}(a) \neq 0$ si f n'est pas identiquement nulle dans un voisinage de a, $+\infty$ sinon.*

Proposition 77 (Factorisation)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ holomorphe. a est un zéro d'ordre m si et seulement si il existe g holomorphe sur Ω telle que $g(a) \neq 0$ et*

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

Théorème 78 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit Ω ouvert connexe et $f : \Omega \to \mathbf{C}$ holomorphe non indentiquement nulle sur Ω. Alors, les zéros de f sont isolés, c'est-à-dire que si $f(a) = 0$ alors il existe $r > 0$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(a,r) \setminus \{a\}$.*

Ainsi, une suite injective de zéros de f ne peut s'accumuler qu'à l'infini ou au bord de Ω mais jamais à l'intérieur de Ω.

Exemple 79. *Les zéros de la fonction $e^z - 1$ tendent vers l'infini. Ceux de $e^{1/z} - 1$ vers 0, qui est l'unique point du bord de $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.*

Proposition 80 (Principe du prolongement analytique)**.** *Soient f, g deux fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω. Si $f(z_n) = g(z_n)$ le long d'une suite injective (z_n) convergeant vers un point de Ω, alors $f \equiv g$.*

Le principe du prolongement analytique permet d'étendre rapidement dans $\mathbf{C}$ des formules connues dans $\mathbf{R}$. Par exemple,

Exemple 81. *Pour tout $z \in \mathbf{C}$,*

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

4.3 Principe du maximum

4.3.1 Principe du maximum dans un ouvert borné

Théorème 82. *Soit f holomorphe sur l'ouvert connexe Ω. Si $|f|$ admet un maximum local en un point de Ω, alors f est constante.*

Démonstration. Supposons que $|f|$ atteint un maximum local en un point $z_0 \in \Omega$ i.e. il existe $r > 0$ t.q. $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour tout $z \in \overline{D(z_0,r)}$. Quiite à prendre r plus petit, f est développable en série entière sur $\overline{D(z_0,r)}$: pour $z = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi[$,

$$g(t) = f(z_0 + re^{it}) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n r^n e^{int}$$

Comme la série converge uniformément,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\overline{g(t)} dt = \cdots = \sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n|^2 r^{2n}$$

Comme $|g(t)| = |f(z)| \leq |f(z_0)| = |a_0|$, en moyennant, il vient

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n|^2 r^{2n} \leq |a_0|^2$$

et donc $a_n = 0$ pour $n \geq 1$ i.e. f est constante sur $\overline{D(z_0,r)}$. Par le principe du prolongement analytique, f est constante dans Ω entier. □

Fin du cours du 17/02/2025

Corollaire 83. *Soit Ω un ouvert connexe borné, f une fonction holomorphe dans Ω, continue sur $\overline{\Omega}$. Alors, ou bien f est constante, ou bien pour tout $z \in \Omega$,*

$$|f(z)| < \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$$

Remarque 84. *En raisonnant sur ses composantes connexes, on conserve l'inégalité suivante sur un ouvert Ω borné quelconque*

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| \leq \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$$

4.3.2 Principe du maximum dans un ouvert non borné

Le principe du maximum s'applique dans un ouvert borné. Sa conclusion peut se révéler fausse sans cette hypothèse. Par exemple $f(z) = z$ est bornée par 1 sur le bord de l'ouver non borné $\mathbf{C} \setminus \overline{D}(0,1)$ mais n'est pas bornée. Si on suppose toutefois que f "n'est pas trop grande", on peut rétablir le principe de comparaison, ce que nous allons voir sur des exemples. Commençons par une généralisation simple du principe de comparaison :

Proposition 85. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, f une fonction holomorphe dans Ω, continue sur $\overline{\Omega}$ et telle que $\lim_{|z|\to+\infty, z\in\Omega} f(z) = 0$. Alors, pour tout $z \in \Omega$,*

$$|f(z)| \leq \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$$

Chapitre 5

Singularités isolées

Dans ce chapitre, on étudie les fonctions qui sont holomorphes sur leur domaine de définition, sauf peut-être en un point $a \in \mathbf{C}$: on les étudiera donc sur des disques épointés ou des couronnes centrées en la singularité potentielle a et on notera $C(a, r_1, r_2) = \{z \ : \ r_1 < |z-a| < r_2\}$, où $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ la couronne centrée en a de rayons $r_1 < r_2$.

5.1 Séries de Laurent

Définition 86. *Une série de Laurent est une série formelle $\sum a_n z^n$, où la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est indexée par $\mathbf{Z}$. Cette série converge si chacune des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ convergent*

Remarque 87. *La somme $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ est appelée partie principale de la série de Laurent. On reconnait la somme d'une série entière en la variable $1/z$, dont le domaine de convergence est donc le complémentaire d'un disque $C(0, r_1, +\infty)$.*

Lemme 88. *Soit $g : C(0, r_1, r_2) \to \mathbf{C}$ et $z = re^{it} \in C(0, r_1, r_2)$. g est $\mathbf{C}$-dérivable au point z si et seulement si g est différentiable en ce point et si les équations de Cauchy-Riemann, écrites en coordonnées polaires, sont satisfaites :*

$$\frac{\partial g}{\partial t}(z) = ir\frac{\partial g}{\partial r}(z)$$

Démonstration. Ecrivons les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires. Comme $\frac{\partial}{\partial y} g = i\frac{\partial}{\partial x}$,

$$\frac{\partial g}{\partial r}(z) = \frac{\partial g}{\partial r}(re^{it}) = \frac{\partial g}{\partial r}(r\cos t, r\sin t) = \frac{\partial g}{\partial x}(z)\cos t + \frac{\partial g}{\partial y}(z)\sin(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(z)e^{it}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(z) = \frac{\partial g}{\partial t}(r\cos t, r\sin t) = \frac{\partial g}{\partial x}(z)(-r\sin t) + \frac{\partial g}{\partial y}(z)r\cos(t) = ir\frac{\partial g}{\partial x}(z)e^{it} = ir\frac{\partial g}{\partial r}(z)$$

La réciproque est laissée en exercice. □

Lemme 89. *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne circulaire $C(a, r_1, r_2)$. Pour $r \in]r_1, r_2[$, l'intégrale $\int_{C(a,r)} f(z)dz$ ne dépend pas de r.*

Démonstration. Soit $g(z) = f(a+z)$. Alors,

$$\int_{C(a,r)} f(z)dz = \int_{C(0,r)} g(z)dz$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dr}\int_{C(0,r)} g(z)dz = \frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} g(re^{it})ire^{it}dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial g}{\partial r}(re^{it})ire^{it} + g(re^{it})ie^{it}\right)dt$$

Donc
$$\frac{d}{dr}\int_{C(0,r)} g(z)dz = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial g}{\partial t}(re^{it})e^{it} + g(re^{it})ie^{it}\right)dt = \int_0^{2\pi}\frac{d}{dt}\left(g(re^{it})e^{it}\right)dt = 0$$

□

Théorème 90 (Développement en série de Laurent)**.** *Soit f holomorphe dans $C(a,r_1,r_2)$. Soit $r\in]r_1,r_2[$ et pour $n\in\mathbf{Z}$,*
$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$
Alors, la série de Laurent $\sum a_n(z-a)^n$ converge uniformément sur tout compact de $C(a,r_1,r_2)$ et
$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(z-a)^n$$
a_n ne dépend pas de r et détermine le n-ième coefficient de la série.

Remarque 91. *Attention, si la série de Laurent est uniquement déterminée sur une couronne donnée, ou même sur deux couronnes concentriques non disjointes, deux couronnes différentes peuvent donner lieu à deux DSL différents. Exemple : $f(z)=\frac{1}{z^2-z}$ sur $C(0,0,1)$ et sur $C(0,1,+\infty)$.*

Démonstration. Soit $z_0\in C(a,r_1,r_2)$ et $g(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ pour $z\in C(a,r_1,r_2)\backslash\{z_0\}$. Alors, g se prolonge en une fonction holomorphe à $C(a,r_1,r_2)$ d'après le théorème de Cauchy. En appliquant le lemme 5.1 à g, on déduit que pour $r_1<r<|z_0-a|<r'<r_2$,
$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\left(\int_{C(a,r')}\frac{f(z)}{z-z_0}dz - \int_{C(a,r)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\right)$$
Puis on développe en série entière les termes $\frac{1}{z-z_0}=\frac{1}{(z-a)+(a-z_0)}$ sur chaque cercle □

5.2 Classification des singularités isolées

Définition 92. *On dit que $a\in\mathbf{C}$ est une singularité isolée de f s'il existe $r>0$ tel que f soit holomorphe dans le disque épointé $\dot{D}(a,r)=C(a,0,r)$. On distingue*

1. *a est une singularité effaçable si f est bornée au voisinage de a*
2. *a est un pôle si $\lim_{z\to a}|f(z)|=+\infty$*
3. *a est une singularité essentielle sinon (c'est-à-dire si $|f|$ est non bornée au voisinage de a mais ne tend pas vers l'infini en a)*

A l'aide des séries de Laurent et du théorème de Goursat, on obtient la caractérisation suivante.

Théorème 93. *Notons $\sum_{\mathbf{Z}} a_n(z-a)^n$ la série de Laurent de la fonction holomorphe f sur $\dot{D}(a,r)$.*

1. *a est une singularité effaçable si et seulement si $a_n=0$ pour tout $n<0$ si et seulement si f se prolonge en une fonction holomoprhe au point a*
2. *a est un pôle si et seulement si sa série de Laurent contient un nombre fini $m\geq 1$ de termes singuliers si et seulement si il existe une fonction holomorphe g au voisinage de a telle que $g(a)\neq 0$ et $f(z)=(z-a)^{-m}g(z)$*
3. *a est une singularité essentielle si et seulement si sa série de Laurent contient un nombre infini de termes singuliers si et seulement si l'image par f de tout voisinage de a est dense dans $\mathbf{C}$.*

Démonstration. (implications les plus simples)

— Si la partie principale de la série de Laurent de f au point a est nulle, alors f se prolonge en une série entière au disque $D(a,r)$. Elle y est donc holomorphe (et donc bornée sur tout compact $K\subset D(a,r)$).

— Si la série de Laurent de f au point a contient un nombre fini $m > 0$ de termes singuliers, alors la fonction g définie sur $\dot{D}(a,r)$ par $g(z) = (z-a)^m f(z)$ se prolonge en une série entière au disque $D(a,r)$ telle que $g(a) \neq 0$. Là encore g est holomorphe et

$$|f(z)| = |(z-a)^{-m} g(z)| \sim |(z-a)^{-m} g(a)| \underset{z \to a}{\to} +\infty$$

— Si la partie principale de la série de Laurent de f au point a est nulle, l'image d'un voisinage $D(a,\rho)$, $\rho < r$, est incluse dans un compact puisque f est holomorphe donc continue sur le compact $\bar{D}(a,\rho)$. Si la série de Laurent de f au point a contient un nombre fini de termes singuliers, $|f(z)| \underset{z \to a}{\to} +\infty$ donc l'image $f(\dot{D}(a,r))$ pour $r > 0$ petit est cette fois incluse dans le complémentaire d'un disque de rayon donné. Dans les deux cas, $f(\dot{D}(a,r))$ n'est pas dense dans $\mathbf{C}$. Par le pricnipe du tiers exclu, si $f(\dot{D}(a,r))$ est dense dans $\mathbf{C}$, nécessairement a est une singularité essentielle.

□

Définition 94. *Si a est un pôle et m l'entier associé, on dit que a est un pôle d'ordre m. Si $m = 1$, on parle de pôle simple, si $m = 2$ de pôle double, etc.*

Exemple 95. 0 *est une singularité essentielle de la fonction* $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

Définition 96. *Soit Ω un ouvert de $\hat{\mathbf{C}}$ et $f : \Omega \to \hat{\mathbf{C}}$ une fonction continue. On dit que f est holomorphe dans Ω si elle est $\mathbf{C}$-dérivable en tout point $z \neq \infty$ tel que $f(z) \neq \infty$, si $1/f$ est $\mathbf{C}$-dérivable en tout point $z \neq \infty$ tel que $f(z) = \infty$, et, dans le cas où $\infty \in \Omega$, si $g(z) = f(1/z)$ est $\mathbf{C}$-dérivable en 0.*

Théorème 97. *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Si a est un pôle de f alors f se prolonge en une application holomorphe à valeurs dans $\hat{\mathbf{C}}$, valant ∞ en a.*

Démonstration. Si a est un pôle de f, f se prolonge en une application continue valant ∞ en a, puisque $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$. Il s'en suit que $1/f$, qui est holomorphe dans $\dot{D}(a,r)$ pour r petit se prolonge en une fonction continue (et donc holomorphe, par le th de Cauchy) au point a en posant $1/f(a) = 0$. □

5.3 Théorème des résidus

Définition 98. *Soit a une singularité isolée de f. Le résidu de f en a, noté* $\mathrm{Res}(f,a)$ *est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans la série de Laurent de f dans un disque épointé $\dot{D}(a,r)$*

Calculons les résidus sur quelques exemples. Pour les pôles simples, on a

Proposition 99.
1. *Si a est un pôle simple,* $\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$
2. *Si a est un pôle simple, et $f = \frac{g}{h}$, où g, h sont holomorphes au voisinage de a, avec $g(a) \neq 0$, alors* $\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

Démonstration. Montrons le deuxième point. Puisque g et h sont holomorphes au point a, on peut écrire leur développement limité au point a et conclure que lorsque $z \to a$,

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(a) + o(1)}{h(a) + h'(a)(z-a) + o(z-a)}$$

Comme a est un pôle simple de f, nécessairement $h(a) = 0$ (car sinon $f(z)$ admettrait une limite finie lorsque $z \to a$ et a ne serait pas un pôle simple) et $h'(a) \neq 0$ (car sinon $|(z-a)f(z)|$ admettrait une limite infinie et a ne serait pas un pôle simple). Ainsi, lorsque $z \to a$,

$$f(z) \sim \frac{g(a)}{h'(a)(z-a)}$$

et donc $\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$. □

Pour les pôles multiples, on peut procéder comme suit

Proposition 100. *Soit a un pôle d'ordre m de $f = \frac{g}{h}$, où g, h sont holomorphes au voisinage de a. Soit $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ la série de Laurent de f dans $\dot{D}(a,r)$. Alors le résidu* $\operatorname{Res}(f,a) = a_{-1}$ *où a_{-1} est déterminé en effectuant les développements limités de g et h à l'ordre m et en résolvant le système associé à*

$$g = \left(\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + O(1)\right) h$$

pour l'inconnue a_{-1}

Exemple 101. *Ci-dessous on note z_k les zéros du dénominateur*

$$\operatorname{Res}(\frac{e^{\pi z}}{z^2+1}, i) = \frac{i}{2}, \quad \operatorname{Res}(\frac{z^3}{z^4+1}, z_k) = \frac{1}{4}, \quad \operatorname{Res}(\cot z, k\pi) = 1,$$

$$\operatorname{Res}(\frac{e^{iz}}{1+\cos z}, (2k+1)\pi) = -2i, \quad \operatorname{Res}(\frac{2z+3}{(z-1)^3 e^z}, 1) = \frac{3}{2e}$$

Les résidus permettent de calculer de nombreuses intégrales, grâce au théorème suivant

Théorème 102 (des résidus)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé, f holomorphe sur Ω sauf en un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_n$ et γ un lacet de support inclus dans Ω ne passant pas par les singularités de f. Alors,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k) \operatorname{Ind}(a_k, \gamma)$$

Remarque 103. *Seules les singularités situées dans la région bornée par γ doivent être prises en compte (l'indice est nul sinon). Notons aussi que si f n'a que de singularités isolées, alors il en existe au plus un nombre fini dans la région bornée par γ et le théorème s'applique encore. Dans le cas usuel d'un lacet simple orienté dans le sens direct, la formule se simplifie :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in\operatorname{int}(\gamma)} \operatorname{Res}(f,a)$$

Démonstration. Puisque Ω est ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que $D(a, r_1) \subset \Omega$. Par hypothèse, f est holomorphe dans le disque épointé $\dot{D}(a, r_1)$. D'après le Théorème 90, elle y est développable en série de Laurent et il existe des coefficients $c_k \in \mathbf{C}$ tels que sa partie principale P_1 s'écrit pour $z \in \dot{D}(a_1, r_1)$,

$$P_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a_1)^k$$

avec convergence uniforme de la série sur les compacts de $\dot{D}(a, r_1)$. Mais, en posant $w = (z-a_1)^{-1}$, P_1 se réécrit comme une série entière de la variable w

$$P_1(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k w^k,$$

qui converge pour w appartenant à un certain disque de convergence $D(0,R)$ et diverge à l'extérieur de $\overline{D(0,R)}$. Autrement dit, la série $P_1(z)$ converge pour $|z-a_1| > 1/R$ et diverge pour $|z-a_1| < 1/R$. Comme la série converge déjà pour $|z-a_1| < r_1$, $z \neq a_1$, nécessairement $R = +\infty$ et la série converge (uniformément sur tout compact de) $\mathbf{C}^*$.
Par symétrie, chacune des parties principales de $P_2, \ldots, P_n$ de la série de Laurent de f aux points $a_2, \ldots, a_n$ est une série qui converge sur $\mathbf{C}^*$. On peut alors écrire

$$f = P_1 + \cdots + P_n + g,$$

où g est holomorphe dans Ω, y compris aux points $a_1, \dots, a_n$. Par le théorème de Cauchy 57, $\int_\gamma g(z)dz = 0$. De plus, comme P_1 converge uniformément sur le compact $\Gamma \subset \mathbf{C}^*$, on a

$$\int_\gamma P_1(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \int_\gamma (z-a_1)^k dz$$

Pour $k < -1$, $z \mapsto (z-a_1)^k$ admet une primitive dans $\mathbf{C}\backslash\{a_1\}$, à savoir la fonction $z \mapsto (z-a_1)^{k+1}/(k+1)$. Ainsi,

$$\int_\gamma (z-a_1)^k dz = 0$$

Pour $k = -1$, par définition de l'indice,

$$\int_\gamma (z-a_1)^{-1} dz = 2i\pi \operatorname{Ind}(a_1, \gamma)$$

Résumons :

$$\int_\gamma P_1(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \int_\gamma (z-a_1)^k dz = c_{-1} 2i\pi \operatorname{Ind}(a_1,\gamma) = 2i\pi \operatorname{Res}(f,a_1) \operatorname{Ind}(a_1,\gamma)$$

Et donc,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma P_1(z)dz + \cdots + \int_\gamma P_n(z)dz + \int_\gamma g(z)dz \\ &= 2i\pi \operatorname{Res}(f,a_1)\operatorname{Ind}(a_1,\gamma) + \cdots + 2i\pi \operatorname{Res}(f,a_n)\operatorname{Ind}(a_n,\gamma)\end{aligned}$$

□

5.4 Calcul d'intégrales

Exemple 104. *Soit $R = R(X,Y)$ une fraction rationnelle sans pôle sur le cercle unité $|X+iY| = 1$. Alors,*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = 2i\pi \sum_{a \text{ pôle de } f \text{ t.q. } |a|<1} \operatorname{Res}(f,a),$$

où on a posé

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2}\right)$$

Ainsi, pour $a \notin \{-1, 1\}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 - 2a\cos t + 1} dt = \frac{2\pi}{|1-a^2|}$$

Exemple 105. *Soit R une fraction rationnelle sans pôle sur $\mathbf{R}$ et telle que $\lim_{|z|\to+\infty} zR(z) = 0$. Alors,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2i\pi \sum_{a \text{ pôle de } f \text{ t.q. } \Re(a)>0} \operatorname{Res}(R,a)$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Exemple 106. *Soit $\alpha \in]0,1[$ et R une fraction rationnelle sans pôle sur $\mathbf{R}_+$ telle que $\lim_{|z|\to+\infty} R(z) = 0$. Alors,*

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = \frac{\pi e^{i\alpha\pi}}{\sin(\alpha\pi)} \sum_{a \text{ pôle de } z^\alpha R(z),\ a \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_+} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, a\right)$$

5.5 Autres applications du théorème des résidus

Le théorème des résidus permet de compter les zéros d'une fonction holomorphe.

Théorème 107 (Rouché)**.** *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur l'ouvert étoilé Ω, γ un lacet simple de support inclus dans Ω ne passant par aucun zéro de f. On note $Z(f,\gamma)$ le nombre de zéros de f, comptés avec leur multiplicité, dans l'intérieur de γ. Alors,*

$$Z(f,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Si g est une fonction holomorphe sur Ω, si le support de γ ne passe par aucun zéro de g non plus et si

$$|f-g| < |f| \quad \textit{sur le support de } \gamma,$$

alors

$$Z(g,\gamma) = Z(f,\gamma).$$

Démonstration. Si f est constante (non nulle), le résultat est immédiat. Sinon, comme Ω est étoilé donc connexe (par arcs), le théorème des zéros isolés s'applique. En particulier, f admet un nombre fini de zéros $a_1, \dots, a_n$ dans l'intérieur de γ (la partie du plan complexe bornée par Γ). Par la proposition 75, chacun de ces zéros est d'ordre fini. Notons m_1 l'ordre de a_1. Par le lemme de factorisation, il existe une fonction holomorphe g telle que $g(a_1) \neq 0$ et $f(z) = (z-a_1)^{m_1} g(z)$. On peut ainsi calculer le résidu de f'/f au point a_1 car lorsque $z \to a_1$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1(z-a_1)^{m_1-1}g(z) + (z-a_1)^{m_1}g'(z)}{(z-a_1)^{m_1}g(z)} \sim \frac{m_1}{z-a_1}$$

et donc $\mathrm{Res}(f'/f, a_1) = m_1$. En procédant de même pour chaque zéro de f, puis en appliquant le théorème des résidus, on déduit que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2i\pi(m_1 + \dots m_n) = 2i\pi Z(f,\gamma).$$

Passons à la deuxième partie du théorème : puisque $|f-g| < |f|$ sur Γ et puisque g ne s'annule pas sur Γ, la fonction $h = f/g$ (bien définie en dehors des zéros de g) vérifie

$$|h-1| < 1 \quad \text{sur } \Gamma$$

Autrement dit, l'image de $h \circ \gamma$ est incluse dans le disque ouvert $D(1,1)$. Il s'ensuite que

$$\mathrm{Ind}(0, h\circ\gamma) = 0$$

A l'aide du changement de variable $w = h(z)$, on déduit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{h\circ\gamma} \frac{1}{w}dw = \mathrm{Ind}(0, h\circ\gamma) = 0$$

Enfin, par dérivation logarithmique, comme $h = f/g$, on a

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

et donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

c'est-à-dire que f et g ont même nombre de zéros dans l'intérieur de γ. □

Le théorème de Rouché indique que si g est suffisamment proche de f sur γ, alors g et f ont même nombre de zéros en son intérieur. Cette propriété nous permet d'en déduire une autre.

Théorème 108 (de l'image ouverte)**.** *Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe non constante sur Ω. Alors, f est ouverte i.e. l'image de tout ouvert par f est ouvert.*

Remarque 109. *La preuve montre un peu plus : si z_0 est un zéro d'ordre m de $z \mapsto f(z) - w_0$, alors, pour w proche mais distinct de w_0, l'équation $f(z) = w$ admet m solutions distinctes. Un exemple concret de ce phénomène est donné par $f(z) = z^2$ et $z_0 = 0$.*

Définition 110. *Un biholomorphisme entre deux ouverts Ω_1, Ω_2 de $\mathbf{C}$ (resp. de $\hat{\mathbf{C}}$) est une fonction holomorphe $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ bijective, dont la fonction réciproque f^{-1} est holomorphe.*

On peut construire un biholomorphisme localement à l'aide du théorème d'inversion locale suivant.

Théorème 111 (d'inversion locale)**.** *Soit f une fonction holomorphe définie sur l'ouvert Ω. Supposons que $f'(z_0) \neq 0$ en un point $z_0 \in \Omega$. Alors, il existe des voisinages Ω_1 et Ω_2 de z_0 et $f(z_0)$ tel que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ soit un biholomorphisme.*

La version globale suivante est utile.

Théorème 112 (d'inversion globale)**.** *Soit f une fonction holomorphe et injective définie sur l'ouvert Ω. Alors,*

1. *$f(\Omega)$ est ouvert*
2. *f' ne s'annule jamais sur Ω*
3. *f est un biholomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.*

Chapitre 6

Représentation conforme

6.1 Equivalence conforme

Définition 113. *Deux chemins γ_1, γ_2 de classe C^1 se coupent en un point $w = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ avec un angle θ si θ est l'angle orienté formé par les vecteurs $\gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2)$ i.e. si*

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 \mod 2\pi$$

où $\gamma_1'(t_1) = r_1 e^{i\theta_1}$ et $\gamma_1'(t_1) = r_2 e^{i\theta_2}$.

Définition 114. *Une fonction f de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ est dite conforme si elle préserve les angles orientés, c'est-à-dire que pour tous chemins γ_1, γ_2 se coupant avec un angle θ, leurs images $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2$ se coupent avec le même angle θ.*

Exemple 115. *Une translation $z \mapsto z + \tau$ où $\tau \in \mathbf{C}$, une homothétie $z \mapsto kz$ où $k \in \mathbf{R}_+^*$, une rotation centrée à l'origine $z \mapsto e^{i\theta} z$, où $\theta \in \mathbf{R}$ et donc toute similitude directe $z \mapsto az + b$, où $a \in \mathbf{C}^*, b \in \mathbf{C}$ sont conformes.*

Exemple 116. *Une symétrie axiale, comme par exemple $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas conforme.*

Remarque 117. *La notion d'application conforme s'étend aux fonctions $f : \Omega \subset \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ en représentant des chemins tracés sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ (on admet que la projection stéréographique est elle-même conforme).*

Le lien entre applications conformes et fonctions holomorphes est donné par la proposition suivante.

Proposition 118. *f est conforme si et seulement si f est holomorphe et f' ne s'annule pas.*

Voici un nouvel exemple important de transformation conforme.

Définition 119. *Une homographie est une application définie pour $z \in \hat{\mathbf{C}}$ par*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

où a, b, c, d sont quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$.

Proposition 120. *Toute homographie est conforme. De plus, l'ensemble H des homographies est un groupe (pour le produit de composition) isomorphe à $GL_2(\mathbf{C})/\mathbf{C}^* I_2$*

Démonstration. Considérons l'application $\Phi : GL_2(\mathbf{C}) \to H$ qui à une matrice inversible

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

associe l'homographie f définie par

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Nous allons montrer que Φ est un morphisme de groupe, dont le noyau se réduit aux multiples non nuls de la matrice identité. Pour ce faire, observons que

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{u}{v} \quad \text{avec} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $M' \in GL_2(\mathbf{C})$ une autre matrice inversible. Notons

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M'M \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que $h = \Phi(M'M)$ est donnée par $h(z) = u'/v'$. Mais on a aussi

$$M' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = v\, M' \begin{pmatrix} u/v \\ 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que le quotient $\frac{u'}{v'}$ des coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est égal à celui des coordonnées de $M' \begin{pmatrix} u/v \\ 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit, $g = \Phi(M')$ vérifie

$$g(u/v) = u'/v'$$

D'où

$$g(f(z)) = u'/v' = h(z)$$

et on a montré que Φ est un morphisme de groupe. Son noyau est l'ensemble des matrices inversibles M pour lesquelles on a pour tout $z \in \hat{\mathbf{C}}$,

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

i.e. $az + b = cz^2 + dz$ ou encore $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Donc, $b = c = 0$ et $a = d$ i.e. $M = aI_2 \in \mathbf{C}^* I_2$ $\square$

La question géométrique qui va nous occuper dans le reste de ce chapitre est la suivante : peut-on transformer un ouvert du plan complexe en un autre à l'aide d'une transformation conforme ?

Définition 121. *Deux ouverts de $\hat{\mathbf{C}}$ sont conformes s'il existe un biholomorphisme de l'un sur l'autre.*

Notons que la conformité est une relation d'équivalence plus fine que l'homéomorphie. Notons aussi que de nombreuses propriétés analytiques sont conservées par les transformations conformes. Par exemple, si Ω est un ouvert conforme à un disque, alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour tout lacet γ et toute fonction holomorphe f.

Exemple 122. *Deux triangles semblables sont conformes et il existe une similitude directe qui transforme l'un en l'autre.*

Pour expliciter cette similitude, on utilise lemme simple suivant

Lemme 123. *Deux triangles de sommets respectifs (z_1, z_2, z_3) et (z_1', z_2', z_3') sont semblables si et seulement si (à renumérotation près) le rapport*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3' - z_1'}{z_3' - z_2'}$$

est conservé.

Exemple 124. *Deux demi-plans sont conformes. Deux disques sont conformes.*

Exemple 125. *Un disque et une couronne circulaire ne sont pas conformes.*

Exemple 126. *Un demi-plan est conforme à un disque et il existe une homographie qui transforme l'un en l'autre.*

On commence par montrer le lemme suivant

Lemme 127. *Il existe une homographie h transformant $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ en $C(0,1)$. Si h envoie les points $0, \infty, 1$ respectivement sur $1, -1, i$, alors h est déterminée par*

$$h(z) = \frac{i - z}{i + z} \tag{6.1.1}$$

Plus généralement,

Lemme 128. *L'ensemble $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ des cercles ou droites (auxquelles on a adjoint ∞) est préservé par toute homographie.*

Démonstration.
Etape 1. Il existe une unique homographie qui envoie $0, \infty, 1$ respectivement sur $1, -1, i$ donnée par

$$h(z) = \frac{i - z}{i + z}$$

De plus, f envoie $\hat{\mathbf{R}}$ sur le cercle unité S^1.
Etape 2. Quatre points deux à deux distincts z_1', z_2', z_3', z_4' sont images resp. de quatre points deux à deux distincts z_1, z_2, z_3, z_4 par une homographie si et seulement si ils ont même birapport

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} : \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$$

Etape 3. Un cercle ou droite est un ensemble de la forme

$$\{z \in \hat{\mathbf{C}} \ : \ [z_1, z_2, z_3, z] \in \hat{\mathbf{R}}\}$$

□

L'homographie donnée par la formule (6.1.1) envoie la droite réelle (union le point à l'infini) sur le cercle unité et donc $\hat{\mathbf{C}} \setminus \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ sur $\hat{\mathbf{C}} \setminus S^1$. Par préservation des composantes connexes, un des demi-plans ouverts dont $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ est la réunion disjointe est donc envoyé sur le disque unité ouvert. Puisqu'un demi-plan ouvert est l'image d'un autre demi-plan ouvert par une similitude directe et qu'il en va de même pour les disques, on déduit que tout demi-plan ouvert est conforme à tout disque ouvert.

Exemple 129. *Une bande, disons $\{z \in \mathbf{C} \ : \ -1 < \Re z < 1\}$, est conforme à un disque.*

Exemple 130. *Un disque épointé est conforme à l'extérieur d'un cercle*

6.2 Automorphismes du plan, de la sphère de Riemann et du disque

Définition 131. *Soit Ω un ouvert de $\hat{\mathbf{C}}$. On appelle automorphisme de Ω tout biholomorphisme de Ω sur lui-même.*

Théorème 132.
1. *Les automorphismes de $\mathbf{C}$ sont les isométries directes.*
2. *Les automorphismes de $\hat{\mathbf{C}}$ sont les homographies.*
3. *Les automorphismes de D sont les homographies de la forme*

$$h(z) = \omega \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z},$$

où $\omega \in S^1$ et $\alpha \in D$.

Remarque 133. *Les seuls automorphismes de D qui fixent l'origine sont les rotations $z \mapsto \omega z$.*

Proposition 134. *$\mathbf{C}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et D sont deux à deux conformément inéquivalents*

6.3 Ouverts simplement connexes

Définition 135. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$. Deux chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ ayant mêmes extrémités sont dits homotopes s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [a, b] \to \Omega$ telle que $H(0, \cdot) = \gamma_0$ et $H(1, \cdot) = \gamma_1$.*

Définition 136. *Un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ est dit simplement connexe si*

1. *Ω est connexe*
2. *deux chemins quelconques tracés dans Ω et ayant mêmes extrémités sont homotopes*

Proposition 137.
1. *Tout ouvert étoilé est simplement connexe*
2. *Tout ouvert homéomorphe à un ouvert simplement connexe est simplement connexe*

Théorème 138. *Soit Ω un ouvert simplement connexe et $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors, pour tous lacets γ_0, γ_1 ayant mêmes extrémités,*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Corollaire 139. *Soit Ω un ouvert simplement connexe.*

1. *Pour tout lacet γ tracé dans Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0$*
2. *Toute fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbf{C}$ admet une primitive*
3. *Si Ω ne contient pas 0, il existe une détermination holomorphe du logarithme et de la racine carrée dans Ω*

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 140. *Soit γ un chemin tracé dans Ω. Il existe une constante $\rho > 0$ (ne dépendant que de γ et Ω) telle que si γ_2 est un autre chemin tracé dans Ω ayant mêmes extrémités que γ et tel que*

$$\|\gamma_1 - \gamma\|_\infty < \rho$$

alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

6.4 Le théorème de représentation conforme de Riemann

Théorème 141. *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe, non vide et distinct de $\mathbf{C}$. Alors, Ω est conforme à D. Soit de plus $z_0 \in \Omega$. Il existe un unique biholomorphisme F de Ω sur D tel que $F(z_0) = 0$ et $F'(z_0) \in \mathbf{R}_+^*$.*

Démonstration.
Etape 1. Ω est conforme à un ouvert $\omega \subset D$.
Puisque Ω ne remplit pas tout $\mathbf{C}$, il existe $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \Omega$. Quitte à translater, on peut supposer $\alpha = 0$, de sorte qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur Ω. Cette détermination est injective, puisque si $\log(z_1) = \log(z_2)$, alors par composition avec l'exponentielle, $z_1 = z_2$. Par le théorème d'inversion globale, log réalise ainsi un biholomorphisme de Ω sur son image et $\tilde{\omega} = \log(\Omega)$ est conforme à Ω.
Soit à présent $z_0 \in \Omega$ et $w_0 = \log(z_0) + 2i\pi$. Alors, $w_0 \notin \tilde{\omega}$. Sinon, il existerait $z_1 \in \Omega$ tel que $\log(z_1) = w_0 = \log(z_0) + 2i\pi$ et par composition avec l'exponentielle, $z_1 = z_0$, d'où $\log(z_1) = \log(z_0)$, ce qui est contredit la définition de z_1. Ainsi, $w_0 \notin \tilde{\omega}$.
En fait, il existe $r > 0$ tel que $\tilde{\omega} \subset \mathbf{C} \setminus \overline{D(w_0, r)}$. Sinon, il existerait une suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de Ω telle que $\log(z_n) \to w_0$ lorsque $n \to +\infty$. Par composition avec l'exponentielle, on aurait alors $z_n \to \exp(w_0) = z_0$ puis, par composition avec le log, $\log(z_n) \to \log(z_0)$. Par unicité de la limite, on aurait $w_0 = \ln(z_0)$, ce qui contredit la définition de w_0.

Ainsi, $\tilde{\omega} \subset \mathbf{C} \setminus \overline{D(w_0, r)}$. L'inversion $w \mapsto \frac{r}{w-w_0}$ est un biholomorphisme envoyant $\mathbf{C} \setminus \overline{D(w_0, r)}$ sur $\dot{D}(w_0, r)$, donc $\tilde{\omega}$ est conforme à un ouvert inclus dans $D(w_0, r)$. Comme tout disque est conforme à un autre, le résultat s'en suit.

Etape 2. Soit F le biholomorphisme de Ω dans D construit à l'étape 1 et $c = |F'(0)| > 0$. L'ensemble $\mathcal{R}$ des biholomorphismes $f : \Omega \to \mathbf{C}$ tels que $f(\Omega) \subset D$, $f(0) = 0$ et $|f'(0)| \geq c$ muni de la topologie de la convergence compacte est compact.

Commençons par montrer que $\mathcal{R}$ est fermé. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{R}$ convergeant uniformément vers f sur les compacts de Ω. Par la proposition 48 et le théorème de Morera, f est holomorphe. Il est clair que $f(0) = 0$. Par la formule de Cauchy et convergence uniforme, $|f'(0)| \geq c$. Montrons que f est injective : soit $z_1 \neq z_2$ et $r < |z_1 - z_2|$. Supposons par l'absurde que la fonction $g(z) = f(z) - f(z_1)$ s'annule en $z = z_2$. Quitte à prendre $r > 0$ plus petit, par le principe des zéros isolés, g ne s'annule pas dans $\dot{D}(z_2, r)$ Pour n assez grand, il résulte du théorème de Rouché que les fonctions g et $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$ ont même nombre de zéros à l'intérieur du disque de $D(z_2, r)$, ce qui est impossible puisque f_n est injective. Ainsi f est injective. Par le théorème d'inversion globale, $f \in \mathcal{R}$ et donc $\mathcal{R}$ est fermé Comme $\mathcal{R}$ est aussi borné (par 1), il résulte du théorème de Montel que $\mathcal{R}$ est compact.

Etape 3. Supposons sans perte de généralité que $0 \in \Omega$. Soit

$$s = \sup_{f \in \mathcal{R}} |f'(0)|$$

Alors, s est atteint par un biholomorphisme de Ω sur D.

Par l'étape 2 et par la continuité de l'application $f \mapsto |f'(0)|$, s est atteint par un biholomorphisme $f \in \mathcal{R}$. Supposons par l'absurde que $f(\Omega)$ ne remplisse pas tout D : il existe $\alpha \in D \setminus f(\Omega)$. L'homographie $h_\alpha : z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$ échange α et 0, donc $\omega = (h_\alpha \circ f)(\Omega)$ est un ouvert conforme à Ω inclus dans D, qui ne contient pas 0. Il existe donc une détermination holomorphe g de la racine carrée sur ω. On ramène enfin le point $\beta = g(\alpha)$ à l'origine, à l'aide de l'homographie $h_\beta : z \mapsto \frac{\beta - z}{1 - \bar{\beta} z}$. Ainsi,

$$F = h_\beta \circ g \circ h_\alpha \circ f$$

est un biholomorphisme de Ω dans D qui préserve l'origine et donc appartient à $\mathcal{R}$. Montrons que $|F'(0)| > |f'(0)|$, ce qui contredira la définition de f comme maximiseur de s.

On observe que g est injective (en composant par la fonction carré $h(z) = z^2$) et on réécrit la relation ci-dessus sous la forme $f = G \circ F$, où $G = h_\alpha^{-1} \circ g^{-1} \circ h_\beta^{-1} = h_\alpha \circ h \circ h_\beta$. Alors, $G(0) = 0$ mais $G : D \to D$ n'est pas injective puisque $h(z) = z^2$ ne l'est pas. Par le lemme de Schwarz, $|G'(0)| < 1$ et donc

$$|f'(0)| < |F'(0)|,$$

ce qui est absurde. $\square$