Corrigé de l'examen du 7 mai 2025

Exercice 1.

1. (a) Comme φ est continue sur le compact $K = I \times \partial\triangle$, φ est bornée et donc intégrable sur K. Le théorème de Fubini s'applique et on a

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \int_{\partial\triangle} \left(\int_I \varphi(z,t)dt\right) dz = \int_I \left(\int_{\partial\triangle} \varphi(z,t)dz\right) dt$$

(b) Par le théorème de Goursat, pour $t \in I$,

$$\int_{\partial\triangle} \varphi(z,t)dz = 0$$

En intégrant par rapport à $t \in I$ et en utilisant la question précédente, on déduit que

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$$

Par le théorème de Morera, f est holomorphe.

2. D'après le cours, la série de Laurent de f contient nécessairement une infinité de termes singuliers.
3. L'homographie $h(z) = \frac{i-z}{i+z}$ est un biholomorphisme du demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ sur le disque unité ouvert $D(0,1)$.

Exercice 2. Exercice déjà corrigé en TD.

Exercice 3. 1. Le dessin est laissé au soin du lecteur. Une paramétrisation de Γ_R est donnée par $\gamma_R^1 \vee \gamma_R^2 \vee \gamma_R^3 \vee \gamma_R^4$, où

$$\begin{aligned}
&\gamma_R^1(t) = t \quad \text{pour } t \in [-R,R],\\
&\gamma_R^2(t) = R + it \quad \text{pour } t \in [0,2],\\
&\gamma_R^3(t) = -t + 2i \quad \text{pour } t \in [-R,R],\\
&\gamma_R^4(t) = -R + i(2-t) \quad \text{pour } t \in [0,2].
\end{aligned}$$

2. On a $\cosh(w) = 0$ si et seulement si $e^w + e^{-w} = 0$ si et seulement si $e^{2w} = -1 = e^{i\pi}$ si et seulement si $w \in i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}$. Comme $w \mapsto \sinh(w)$ est non nul en de tels points, ce sont des zéros simples.
3. Comme de plus $e^{-2i\pi z}$ ne s'annule pas, a et b sont des pôles simples de la fonction

$$f(z) = \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{\cosh(\pi z)}$$

La proposition 99 du cours s'applique. On trouve

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{e^{\pi\xi}}{i\pi}, \quad \mathrm{Res}(f,b) = -\frac{e^{3\pi\xi}}{i\pi}$$

4. Sauf aux deux points a, b, f est holomorphe dans l'intérieur Ω d'un rectangle contenant Γ_R. Ω est étoilé, donc le théorème des résidus s'applique :

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi(\text{Res}(f,a) + \text{Res}(f,b)) = 2\left(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}\right)$$

5. Pour $y \in [0,2]$, on a

$$\left|e^{-2i\pi\xi(R+iy)}\right| = e^{2\pi\xi y} \leq e^{4\pi\xi}$$

et

$$|\cosh(\pi(R+iy))| = \left|\frac{e^{\pi R+i\pi y} - e^{-\pi R-i\pi y}}{2}\right| \geq \frac{e^{\pi R} - e^{-\pi R}}{2}$$

D'où

$$\left|\int_0^2 f(R+iy)dy\right| \leq \frac{4e^{4\pi\xi}}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De même, pour $y \in [0,2]$, on a

$$\left|e^{-2i\pi\xi(-R+iy)}\right| = e^{2\pi\xi y} \leq e^{4\pi\xi}$$

et

$$|\cosh(\pi(-R+iy))| = \left|\frac{e^{-\pi R+i\pi y} - e^{\pi R-i\pi y}}{2}\right| \geq \frac{e^{\pi R} - e^{-\pi R}}{2}$$

D'où,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^2 f(-R+iy)dy = 0.$$

6.
$$\cosh(z+2i\pi) = \frac{e^{z+2i\pi} - e^{-z-2i\pi}}{2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \cosh(z),$$

donc cosh est $2i\pi$ pérodique. Ainsi, en utilisant le changement de variable $z = w + 2i$,

$$\int_{[R+2i,-R+2i]} f(z)dz = -\int_{[-R,R]} f(w+2i)dw = -\int_{[-R,R]} \frac{e^{-2i\pi\xi(w+2i)}}{\cosh(\pi w)}dw = -e^{4\pi\xi}\int_{[-R,R]} f(z)dz$$

7. Notons que la fonction g définie par $x \mapsto g(x) = \frac{1}{\cosh(\pi x)}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ puisqu'elle est continue et $g(x) \sim 2e^{-\pi|x|}$ lorsque $|x| \to +\infty$. En particulier, on peut passer à la limite $R \to +\infty$ dans l'égalité établie à la question 4 et conclure, à l'aide des questions 5 et 6, que

$$(1 - e^{4\pi\xi})\hat{g}(\xi) = 2\left(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}\right)$$

et donc

$$\hat{g}(\xi) = 2\frac{e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}}{1 - e^{4\pi\xi}} = 2e^{\pi\xi}\frac{1 - e^{2\pi\xi}}{1 - e^{4\pi\xi}} = 2e^{\pi\xi}\frac{1}{1 + e^{2\pi\xi}} = \frac{2}{e^{-\pi\xi} + e^{\pi\xi}} = g(\xi)$$

g n'est pas l'unique fonction laissée invariante par la transformée de Fourier. On a vu [1] en TD que la gaussienne $x \mapsto g(x) = e^{-\pi x^2}$ vérifie également cette propriété.

Exercice 4.

1.
$$G(z) = \frac{F(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}}{1+\epsilon z} = \frac{F(z)\exp((z-1)\ln M_0)\exp(-z\ln M_1)}{1+\epsilon z}$$

est holomorphe dans Ω (resp. continue sur $\overline{\Omega}$) comme quotient de fonctions holomorphes (resp. continues) dont le dénominateur ne s'annule pas, puisque $|1+\epsilon z| \geq 1 + \epsilon x \geq 1$ si $z \in \overline{\Omega}$. De plus, pour $|z| > 1/\epsilon$,

$$|G(z)| \leq \frac{\|F\|_\infty \max_{x\in[0,1]}(M_0^{x-1}M_1^{-x})}{\epsilon|z| - 1} \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

1. au changement de variable $y = 2\pi x$ près

2. Si $x = \Re(z) = 0$, alors $|F(z)| \leq M_0$, $|(M_0+\epsilon)^{z-1}| = (M_0+\epsilon)^{-1}$, $|(M_1+\epsilon)^{-z}| = 1$ et $|1+\epsilon z| \geq 1$, donc $|G(z)| \leq 1$. De même, si $x = 1$, alors $|F(z)| \leq M_1$, $|(M_0+\epsilon)^{z-1}| = 1$, $|(M_1+\epsilon)^{-z}| = (M_1+\epsilon)^{-1}$ et $|1+\epsilon z| \geq 1$, donc $|G(z)| \leq 1$.
3. Comme $\lim_{|z|\to+\infty} G(z) = 0$, G holomorphe dans Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, le principe du maximum s'applique :
$$|G(z)| \leq \sup_{z\in\partial\Omega} |G(z)| \leq 1$$
D'où, pour tout $z \in \Omega$,
$$|F(z)| \leq (M_0+\epsilon)^{1-x}(M_1+\epsilon)^x|1+\epsilon z|$$
En faisant tendre $\epsilon \to 0$, on obtient l'inégalité désirée.

Exercice 5. 1. Soient I (respectivement J) un intervalle compact contenant le support de f (respectivement g), Z_f (respectivement Z_g) l'ensemble des zéros de f (respectivement g). Alors
$$F(z) = \int_{(I\setminus Z_f)\times(J\setminus Z_g)} e^{-2i\pi x\xi}|f(x)|^{\frac{p}{P(z)}-1}f(x)\,|g(\xi)|^{\frac{p}{P(z)}-1}g(\xi)\,dxd\xi,$$
Par définition, $1/P$ est affine donc holomorphe. Par composition avec l'exponentielle complexe, $z \mapsto e^{-2i\pi x\xi}|f(x)|^{\frac{p}{P(z)}-1}f(x)\,|g(\xi)|^{\frac{p}{P(z)}-1}g(\xi)$ l'est aussi. Par le raisonnement de la question 1 de l'exercice 1 (appliqué deux fois de suite), F est holomorphe dans Ω. De plus, pour $z \in \overline{\Omega}$,
$$\left|e^{-2i\pi x\xi}|f(x)|^{\frac{p}{P(z)}-1}f(x)\,|g(\xi)|^{\frac{p}{P(z)}-1}g(\xi)\right| \leq |f(x)|^{\frac{p}{P(\Re(z))}}|g(\xi)|^{\frac{p}{P(\Re(x))}} \qquad (1)$$
Comme $P(\Re(z)) \in [1,2]$, on déduit que pour toute constante $M \geq 1$ majorant $|f|$ et $|g|$,
$$\left|e^{-2i\pi x\xi}|f(x)|^{\frac{p}{P(z)}-1}f(x)\,|g(\xi)|^{\frac{p}{P(z)}-1}g(\xi)\right| \leq M^{2p}$$
Par le théorème de convergence dominée, F est continue sur $\overline{\Omega}$ et $\lim_{|z|\to+\infty} F(z) = 0$. De plus, pour $\Re(z) = 0$, $P(\Re(z)) = 1$ et on déduit de (1) que
$$|F(z)| \leq \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x)|^p|g(\xi)|^p dxd\xi = \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = 1$$
tandis que pour $\Re(z) = 1$, $P(\Re(z)) = 2$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$|F(z)| \leq \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x)|^{\frac{p}{2}}|g(\xi)|^{\frac{p}{2}}dxd\xi = \|f\|^{p/2}_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|^{p/2}_{L^p(\mathbb{R})} = 1$$
En appliquant l'exercie 4, on conclut que pour tout $z \in \Omega$,
$$|F(z)| \leq 1$$
2. En choisissant $z \in [0,1]$ tel que $P(z) = p$, l'expression de $F(z)$ se simplifie et nous venons de montrer que
$$\left|\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi\right| \leq 1$$
D'après l'indication, on déduit que pour tout $f \in C_c(\mathbb{R})$ tel que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$,
$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \leq 1$$
L'espace $C_c(\mathbb{R})$ étant dense dans $L^p(\mathbb{R})$, il suit du théorème de prolongement des applications uniformément continues vu en analyse fonctionnelle que la transformée de Fourier se prolonge en une application continue de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^{p'}(\mathbb{R})$