

Exercice 1

1. On sait qu'il existe une détermination holomorphe g du logarithme de f , c'est-à-dire

$$f = e^g \quad \text{dans } \Omega$$

En dérivant, $f' = e^g g' = f g'$

D'où, $g' = f'/f$, puisque f ne s'annule pas.

2. Réciproquement, si Ω est connexe et contient 0,

$$f = e^g \quad \text{dans } \Omega$$

si

$$\begin{cases} f' = e^g f' = f g' \\ f(0) = e^{g(0)} \end{cases}$$

Ces deux conditions étant satisfaites par hypothèse, g est bien une détermination holomorphe de f .

3. D'après le cours, il suffit que Ω soit étoile

4. D'après les questions précédentes, il suffit que Ω soit étoile

Exercice 2 : cf. TD

Exercice 3

1. En dérivant l'équation

$$\tan(f(z)) = z, \quad z \in \Omega$$

on trouve $(1 + \tan^2(f(z))) f'(z) = 1$

soit $\boxed{(1 + z^2) f'(z) = 1} \quad (*)$

En particulier, $z \notin \{-i, i\}$ car sinon $(1 + z^2)$ s'annulerait, ce qui contredit (*).

2. Par définition, pour $w \in \mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} \tan w &= \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \\ &= \frac{1}{i} \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} \end{aligned}$$

Donc, $\tan(f(z)) = z$, pour f à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$,

soit $\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = iz$, où $w = f(z)$

En multipliant par $e^{2iw} + 1 \neq 0$, on obtient l'équation équivalente

$$e^{2iw} - 1 = (e^{2iw} + 1)iz = e^{2iw}iz + iz$$

$\mathcal{C}'$ est $\bar{\alpha}$ -dire

$$e^{2i\omega}(1-iz) = 1+iz, \text{ où } \omega = f(z)$$

Pour $z \neq -i$, on trouve donc l'équation équivalente

$$\left| e^{2if(z)} = \frac{1+iz}{1-iz} \right|, \quad z \in \Omega$$

Notons que pour $z \neq i$, le membre de droite ne s'annule pas.

On veut ainsi de montrer que (i) est équivalent à (ii).

3. (a) Pour $z \in \Omega$, notons $y = \text{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $x = \text{Re}(z)$.

Alors, $z \in \Omega$ si et seulement si

$$x \neq 0 \text{ ou } |y| < 1.$$

Si $|y| < 1$ alors, pour $t \in [0, 1]$, $|ty| < 1$ et donc $[0, z] \subset \Omega$.

Si $z \neq 0$ alors, pour $t \in]0, 1]$, $tx \neq 0$. Comme de plus $0 \in \Omega$, on conclut là encore que $[0, z] \subset \Omega$.

(b) Comme Ω est étoilé et que $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$ est holomorphe

et ne s'annule pas dans Ω (car $i \notin \Omega$), on déduit de

l'exercice 1.4 que cette fonction admet une détermination

holomorphe de son logarithme. Par la question 1, on déduit

qu'il existe une dét. holomorphe f de la fonction arctangente dans Ω .

$$4. \text{ Pour } |z| < 1, \quad \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$$

D'après la question 1, $f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Comme $f(0) = 0$, on peut

intégrer le DSE de $\frac{1}{1+z^2}$ sur son disque de convergence $D(0,1)$ et déduire que

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pour } z \in D(0,1)}$$

Ex 4

1(a) si $\gamma_0(t) = 0$ alors

$$|0 - \gamma_1(t)| < 0 + |\gamma_1(t)|$$

ce qui est impossible. Donc γ_0 , et par symétrie γ_1 , sont tracés dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. On peut donc diviser par $|\gamma_1(t)|$

et déduire que $|\gamma(t) - 1| < |\gamma(t)|$ pour $t \in [0,1]$

En particulier, $\gamma(t) \notin \mathbb{R}_-$, car sinon

$$|\gamma(t) - 1| = 1 + |\gamma(t)| \geq |\gamma(t)|.$$

(b) La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$:

la détermination principale du logarithme. Comme γ est un arc tracé dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on déduit que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 0$$

Comme $\gamma = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}$, $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_0'}{\gamma_0} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}$ et donc

$$0 = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} - \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\text{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0)}$$

2. (a)

$$|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| = |P(re^{2i\pi t}) - Q(re^{2i\pi t})|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{m-1} a_k r^k e^{2ik\pi t} \right|$$

D'autre, $\left| \frac{\gamma_0(t) - \gamma_1(t)}{\gamma_1(t)} \right| = \left| \sum_{k=0}^{m-1} a_k r^{k-m} e^{2i(k-n)\pi t} \right|$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} |a_k| r^{k-m} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, il existe $r > 0$ assez grand, tel que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\frac{|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)|}{|\gamma_1(t)|} < 1.$$

(b) (i) Par la question 1, si r est assez grand,

$$\text{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0).$$

De plus, $\gamma_1(t) = r^m e^{2im\pi t}$, pour $t \in [0, 1]$

D'autre, $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 2im\pi$ et donc

$$\text{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0) = m \geq 1$$

Mais, si P n'a pas de racine, $z \mapsto \frac{P'(z)}{P(z)}$ est entière et donc

$$\int_{C(0, r)} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 0.$$

Mais, $\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = \int_{C(0, r)} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$, ce qui est absurde : $\boxed{P \text{ admet une racine dans } \mathbb{C}}$