

8 - Théorème de Cauchy : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holo (sauf peut être en 1 pt où on la suppose continue). Alors

(i) f admet une primitive F dans Ω

(ii) pour tout lacet γ de support $\Gamma \subset \Omega$,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Démo : construisons une primitive. Soit $a \in \Omega$ (q Ω soit étoilé en a). Soit $F(z) = \int_{[a,z]} f(w) dw$ pour $z \in \Omega$

(bien définie car f est continue et $[a,z] \subset \Omega$)

Fixons $z \in \Omega$ et $r > 0$, tel que $D(z, r) \subset \Omega$

Prenons $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $|h| < r$

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \left(\int_{[a, z+h]} f(w) dw - \int_{[a, z]} f(w) dw \right) - f(z) \right|$$

Par définition d'un ouvert étoilé $[a, z]$ et $[a, z+h]$ inclus dans Ω . Par définition du disque $D(z, r)$, le segment

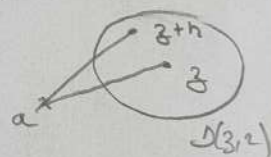
$[z, z+h]$ inclus dans le disque, donc dans Ω

Par définition d'un ouvert étoilé,

$[a, w] \subset \Omega$ pour tout $w \in [z, z+h]$

et donc le triangle plein Δ de sommets

$a, z, z+h$ est inclus dans Ω



D'après le théorème de Gaussat : $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w) dw - f(z) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} (f(w) - f(z)) dw \right| \leq \frac{1}{|h|} \sup_{w \in [z, z+h]} |f(w) - f(z)| \text{long}([z, z+h]) \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{w \in [z, z+h]} |f(w) - f(z)|$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue au point z , $\exists r > 0$ tel que $|w - z| < r \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Avec ce choix de r , il vient

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon \text{ si } |h| < r. \text{ Donc } F \text{ primitive de } f \text{ et (ii) suit car } \gamma \text{ est un lacet}$$