

Preuve 7

Proposition

**Soit γ un lacet et $z_0 \notin \Gamma$.
L'indice est nul sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.**

Preuve

Soit γ un lacet et $z_0 \notin \Gamma$.
Soit M un majorant de $|z|$ pour $z \in \Gamma$ et z_0 un point de la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ tel que .

$$|z_0| > M.$$

Alors Par l'inégalité triangulaire, pour $z \in \Gamma$:

$$|z - z_0| \geq |z_0| - |z| \geq |z_0| - M.$$

On en déduit que :

$$|\text{Ind}(z_0, \gamma)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|z_0| - M} \text{long}(\gamma)$$

Or on sait que la composante est non bornée, on peut donc remplacer z_0 par z_n telle que $|z_n| \rightarrow \infty$, ce qui donne :

$$|\text{Ind}(z_0, \gamma)| = |\text{Ind}(z_n, \gamma)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|z_n| - M} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Donc :

$$\text{Ind}(z_0, \gamma) = 0$$