

GROUPE : FORTNITE GODS

Preuve 6

Analyse complexe

Proposition:

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet et $z_0 \notin \Gamma$, l'indice $Ind(z_0, \gamma)$ est un entier $n \in \mathbb{Z}$

Preuve:

$\forall t \in [a, b]$, on pose :

$$\Psi(t) = \exp \left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds \right)$$

On a d'une part $\Psi(a) = 1$.

Si on arrive à montrer que $\Psi(b) = 1$, on aura montré que l'indice est un entier car $\exp(z_0) = 1 \Rightarrow z_0 = 2ik\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Calculons alors Ψ' pour voir si on obtient de nouvelles informations sur Ψ .

$$\Psi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \Psi(t)$$

C'est à dire , $(\gamma(t) - z_0)\Psi'(t) - \gamma'(t)\Psi(t) = 0$

C'est à dire , $\left(\frac{\Psi(t)}{\gamma(t) - z_0} \right)' = 0$ Par formule de derivation d'un quotient

On a alors que $\frac{\Psi(t)}{\gamma(t) - z_0}$ est constant sur $[a, b]$ et donc:

$$\frac{\Psi(b)}{\gamma(b) - z_0} = \frac{\Psi(a)}{\gamma(a) - z_0} = \frac{1}{\gamma(b) - z_0}$$

La dernière égalité vient du fait que γ est un lacet alors $\gamma(a) = \gamma(b)$

On a alors que $\Psi(b) = 1$ et alors $\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds = 2ki\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ Donc $Ind(z_0, \gamma) \in \mathbb{Z}$