Analyse matricielle et algèbre linéaire appliquée B

Fiche 7 : - Méthodes itératives -

Exercice 1. On considère la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer sa matrice de Jacobi et les valeurs propres de celle-ci.
2. Déterminer sa matrice de Gauss-Seidel et les valeurs propres de celle-ci.

Exercice 2. Soit A la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. Déterminer sa matrice de Jacobi et ses valeurs propres λ_1 et λ_2.
2. Déterminer sa matrice de Gauss-Seidel et ses valeurs propres μ_1 et μ_2.
3. Comparer λ_{max} et μ_{max}.

Exercice 3. On pose

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

et $b = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}$.

1. Donner la solution de l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
2. Calculer le rayon spectral de la matrice de Jacobi de $\mathbf{A}$.
3. Utiliser la méthode de Jacobi pour trouver une valeur approchée de la solution.

Exercice 4. On pose

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

1. Donner la solution de l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
2. Calculer le rayon spectral de la matrice de Jacobi de $\mathbf{A}$.
3. La méthode de Jacobi donne-t-elle une solution approchée ?

Exercice 5. On pose

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

1. Donner la solution de l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
2. Calculer le rayon spectral de la matrice de Gauss-Seidel de $\mathbf{A}$.

3. Utiliser la méthode de Gauss-Seidel pour trouver une valeur approchée de la solution.

Exercice 6. On pose

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

1. Donner la solution de l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
2. Calculer le rayon spectral de la matrice de Gauss-Seidel de $\mathbf{A}$.
3. La méthode de Gauss-Seidel donne-t-elle une solution approchée ?

Exercice 7. On considère la matrice $\mathbf{A}_1$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exercice, on applique la méthode Jacobi à la matrice $\mathbf{A_1}$.

1. Déterminer la matrice de Jacobi $\mathbf{B}$ de la matrice $\mathbf{A_1}$.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{B}$.
3. Déterminer le rayon spectral de $\mathbf{B}$.
4. La méthode de Jacobi est-elle convergente pour la matrice $\mathbf{A_1}$?
5. Faire quatre itérations (les valeurs $\mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}, \mathbf{x_5}$) de calcul de solution de l'équation suivante $\mathbf{A_1 x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ en utilisant $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ comme un vecteur de départ $\mathbf{x_1}$.
6. On sait que la solution exacte est un vecteur à coefficients entiers. À partir des calculs de $\mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}, \mathbf{x_5}$ peut-on donner la valeur exacte de $\mathbf{x}$? La trouver.

Exercice 8. On considère la matrice $\mathbf{A_3}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Dans cet exercice, on applique la méthode de Gauss-Seidel à la matrice $\mathbf{A_3}$ pour resoudre le système $\mathbf{A_3 x} = \mathbf{b}$ où $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ 10 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A_3}$.
2. La méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente pour la matrice $\mathbf{A_3}$?
3. On décompose $\mathbf{A_3} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$. Donner la matrice $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{E}$ et $\mathbf{N} = \mathbf{F}$. Calculer $\mathbf{M}^{-1}$.
4. Faire deux itérations (trouver $\mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$) de calcul de solution de l'équation suivante $\mathbf{A_3 x} = \mathbf{b}$ en utilisant $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ comme un vecteur de départ $\mathbf{x_1}$.
5. Faire une itération avec le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ comme vecteur de départ. Qu'est ce qu'on observe et que peut-on conclure ?