AMALA-B Fiche Finale

Exo 1

On considère la matrice $\mathbf{A}_4$ à coefficients réels définie par

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$a_1 \; a_2 \; a_3$

1. Calculer une décomposition QR de la matrice $\mathbf{A}_4$.
2. Calculer le déterminant de la matrice $\mathbf{R}$.
3. En déduire le déterminant de la matrice $\mathbf{Q}$.
4. À l'aide de cette décomposition QR de la matrice $\mathbf{A}_4$, résoudre le système

$$\mathbf{A}_4 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Gram-Schmidt :

$$a_1 \to e_1 = \frac{a_1}{|a_1|}$$

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$a_2 \mapsto a_2 - ({}^T a_2 \cdot e_1) \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (3-1)}^{2/\sqrt{2} = \sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$$

$$\boxed{e_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$$

$$a_3 \mapsto a_3 - (a_3^T \cdot e_1) \cdot e_1 - (a_3^T \cdot e_2) \cdot e_2$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \underbrace{\left((3\,1\,5) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right)}_{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\left((3\,1\,5) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right)}_{3} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|a_3| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\boxed{e_3 = \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

$$R = \begin{pmatrix} a_1^T e_1 & a_2^T e_1 & a^T e_1 \\ 0 & a_2^T e_2 & a_3^T e_2 \\ 0 & 0 & a_3^T e_3 \end{pmatrix}, \quad \boxed{R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

2. $\det R = \sqrt{2}\cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = 18$

3. $\det A_2 - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5-1-15+3 = -18$

Comme $- = QR$ on a $\det A = \det Q \cdot \det R$

et $\det Q = \dfrac{\det A}{\det R} = \dfrac{-18}{18} = -1$

Q est orthogonal i.e. $Q^TQ = \text{Identité}$

4 Pour resoudre $QR\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

On multipli cette eqn. par Q^T à gauche:

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \underbrace{Q^TQ}_{= Id} R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q^T\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

, Q est orthog

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & 1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 6 \\ \sqrt{18} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 6 \\ \sqrt{18} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z = 2\sqrt{2} \\ 3y + 3z = 6 \\ \sqrt{18}\,z = \sqrt{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Exo 2

On considère la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur $\mathbf{b}$ à coefficients réels définis par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur les vecteurs

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer une base orthonormale de l'espace des colonnes de la matrice $\mathbf{A}$.
3. En déduire une décomposition $\mathbf{QR}$ de la matrice $\mathbf{A}$.
4. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\mathbf{b}$ sur l'espace des colonnes de $\mathbf{A}$.
5. À l'aide de la décomposition $\mathbf{QR}$ de la matrice $\mathbf{A}$, trouver la solution des moindres carrés du système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

1. $\tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \underline{q_1} = \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\tilde{q}_2 = a_2 - q_1^T \cdot a_2 \cdot q_1$, $\quad q_1^T \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1\ 2\ 0) \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

$$\tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} - 2\sqrt{5} \, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\|\tilde{q}_2\| = \sqrt{3^2 (2^2 + (-1)^2 + (-2)^2)} = \sqrt{9 \cdot 9} = 9$$

$$\underline{q_2} = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \boxed{\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}}$$

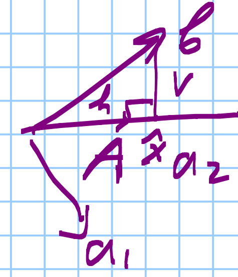
2. Une base orthonormale est donc $\{q_1, q_2\}$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

3. QR : $\quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -1/3 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 \\ 0 & q_2^T a_2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & 9 \end{pmatrix}} \qquad q_2^T \cdot a_2 = \frac{1}{3} (2\ -1\ -2) \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot 8 - 1 + 2 \cdot 6}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

4. b sur les colonnes de A :



$$(A^T b) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 8 & 1 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$$

$v \perp \mathrm{Vect}(a_1, a_2)$ $\quad h \in \mathrm{Vect}(a_1, a_2)$

$Ax = h$ $\qquad$ On cherche h, et $h = Ax$

$A^T h = A^T(h+v)$ car $A^T v = 0$ $(v \perp A)$

Donc $A^T A x = A^T b$ et $h = Ax = A(A^TA)^{-1}A^T b = QQ^T b$

$$h = \begin{pmatrix}1/\sqrt5 & 2/3\\ 2/\sqrt5 & -1/3\\ 0 & -2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt5 & 2/\sqrt5 & 0\\ 2/3 & -1/3 & -2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt5 & 2/3\\ 2/\sqrt5 & -1/3\\ 0 & -2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2/3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-4/9\\ 2/9\\ 4/9\end{pmatrix}}$$

5. $A = QR$, $\quad A\hat{x} = b$

$$A^T A \cdot \hat{x} = A^T b, \quad \hat{x} = (A^TA)^{-1}A^T b = ((QR)^T QR)^{-1}(QR)^T b$$

$$\underline{\hat{x}} = (R^T \underbrace{Q^T Q}_{Id} R)^{-1} R^T Q^T b = \underline{R^{-1} Q^T b}$$

$$\begin{pmatrix}\sqrt5 & 2\sqrt5\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt5 & 2/\sqrt5 & 0\\ 2/3 & -1/3 & -2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2/3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\sqrt5\, x + 2\sqrt5\, y = 0\\ 9y = -2/3\end{cases} \qquad \begin{cases}x = 4/27\\ y = -2/27\end{cases} \qquad \boxed{\hat{x} = \begin{pmatrix}4/27\\ -2/27\end{pmatrix}}$$

Exo 3

On considère la matrice $\mathbf{A}_1$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}.$$

Dans cet exercice, on applique la méthode Jacobi à la matrice $\mathbf{A}_1$.

1. Déterminer la matrice de Jacobi $\mathbf{B}$ de la matrice $\mathbf{A}_1$.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{B}$.
3. Déterminer le rayon spectral de $\mathbf{B}$.
4. La méthode de Jacobi est-elle convergente pour la matrice $\mathbf{A}_1$?
5. Faire quatre itérations (les valeurs $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5$) de calcul de solution de l'équation suivante $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ en utilisant $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ comme un vecteur de départ $\mathbf{x}_1$.
6. On sait que la solution exacte est un vecteur à coefficients entiers. À partir des calculs de $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5$ peut-on donner la valeur exacte de $\mathbf{x}$? La trouver.

$M = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$A_1 = M - N$

$B = M^{-1}N$

1. $M^{-1} = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$ $\qquad \left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\right)$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}\, B \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \ \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{Sp\, B = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}}$$

3. $\underline{\rho(B)} = \max \left\{ \left|-\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{1}{2}\right| \right\} = \boxed{\frac{1}{2}}$

4. Méthode de Jacobi est <u>convergente</u> car $\rho(B) < 1$

5. $A_1 x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\boxed{x_{k+1}} = B x_k + M^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}, \ x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}25 \\ +1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0.75 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}75 \\ 0{,}375 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1{,}25 \\ -2{,}125 \end{pmatrix}}$$

$$x_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}25 \\ -2.125 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}0625 \\ 0{,}625 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}9375 \\ -1{,}875 \end{pmatrix}}$$

6. On voit que la solution approche $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Vérifions : $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$ Bingo !

Exo 4

On considère la matrice $\mathbf{A}_3$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Dans cet exercice, on applique la méthode de Gauss-Seidel à la matrice $\mathbf{A}_3$ pour resoudre le système $\mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ 10 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}_3$.
2. La méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente pour la matrice $\mathbf{A}_3$?
3. On décompose $\mathbf{A}_3 = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$. Donner la matrice $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{E}$ et $\mathbf{N} = \mathbf{F}$. Calculer $\mathbf{M}^{-1}$.
4. Faire deux itérations (trouver $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$) de calcul de solution de l'équation suivante $\mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ comme un vecteur de départ $\mathbf{x}_1$.
5. Faire une itération avec le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ comme vecteur de départ. Qu'est ce qu'on observe et que peut-on conclure ?

1. $\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$= (4-\lambda)^2 \cdot (3-\lambda) - (4-\lambda) - 1\cdot(4-\lambda)$

$= (4-\lambda)\big((4-\lambda)(3-\lambda)-2\big)$

$= (4-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10)$

$= (4-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-5)$

$\boxed{Sp\, A_3 = \{2,4,5\}}$

2. A_3 est symétrique et les valeurs propres sont positives. Par conséquent la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

3. $A_3 = D - E - F \qquad M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/12 & 1/3 & 0 \\ 1/48 & 1/12 & 1/4 \end{pmatrix}}$

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/3 \\ 0 & 1/48 & 1/12 \end{pmatrix}$

4. $x_{k+1} = B\,x_k + M^{-1}b, \quad M^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -5/2 \\ 15/8 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = 0 + \boxed{\begin{pmatrix} 3/2 \\ -5/2 \\ 15/8 \end{pmatrix}}$

$x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/3 \\ 0 & 1/48 & 1/12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 \\ -5/2 \\ 15/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -5/2 \\ 15/8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7/8 \\ -25/12 \\ 95/48 \end{pmatrix}}$

5. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/3 \\ 0 & 1/48 & 1/12 \end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -5/2 \\ 15/8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}$

Chaque itération donne la même solution : $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ — solution exacte !

Soit $Ax = b$, x - soln exacte. Alors $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ car $A = M - N$: $(M-N)x = b$ on substitue $b = (M-N)x_k$ dans $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}(M-N)x_k$

et $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + (M^{-1}M - M^{-1}N)x_k = x_k$

Exo 5

On considère la matrice $\mathbf{A}_3$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & -5 \\ -1 & 6 & -30 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exercice, on applique la méthode de Gauss-Seidel à la matrice $\mathbf{A}_3$.

1. Déterminer la matrice de Jacobi $\mathbf{B}_3$ de la matrice $\mathbf{A}_3$.

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{B}_3$.

3. Déterminer le rayon spectral de $\mathbf{B}_3$.

4. La méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente pour la matrice $\mathbf{A}_3$?

5. Faire trois itérations de calcul de solution de l'équation suivante

$$\mathbf{A}_3\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

en utilisant

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

comme un vecteur de départ.

$B = M^{-1}N$ où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 6 & 30 \end{pmatrix}$$

et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M^{-1} :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 6 & -30 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \xrightarrow[L_1+L_3]{L_1+L_2} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -30 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L_2/6} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -30 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{-L_3+6L_2} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$L_3/(-30)$

$$\Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{30} \end{matrix}\right), \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/30 & -1/30 \end{pmatrix}$$

$$B = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/30 & -1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

2. La matrice B est triang. superieur — ces valeur propres sont sur sa diagonale : $\boxed{Sp(B) = \{0, \frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{6}\}}$

3. Rayon spectral : $\rho_B = \max\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\} = \boxed{\frac{1}{3}}$

4. La methode de Gauss-Seidel est convergente car $\rho_B < 1$

5

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + M^{-1} b, \quad M^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\frac{10}{30} - \frac{35}{30} = \frac{1}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} - \frac{5}{6} \\ 5/9 - \frac{5}{6} \\ -5/36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \underset{5/2}{\overset{}{15/6}} \\ 25/18 \\ -\frac{35}{36} \end{pmatrix}}$$

$5/2 = 15/6$, $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, $5/2$.

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/2 \\ 25/18 \\ -\frac{35}{36} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10/6 \\ -5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{18} - \frac{35}{36} \\ \frac{25}{3 \cdot 18} - \frac{35}{36} + \frac{25}{18} \\ -\frac{35}{36 \cdot 6} - \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{65}{36} \\ \frac{95}{108} \\ -\frac{215}{216} \end{pmatrix}},$$

$100 - 35 = \frac{65}{3}$

$\frac{50 - 105 + 150}{6 \cdot 18} = \frac{95}{6 \cdot 18}$

$\frac{-5 \cdot 36 - 35}{216} = \frac{-215}{216}$

Vérification :

En fait la solution exacte est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on voit déjà bien que $y_k \to 1$, $z_k \to -1$

pour x_k on le verra avec plus d'itérations

On remarque

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1/3 - 1 \\ -1/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Hourra !