Fiche de TD 9
Réduction de Jordan des matrices nilpotentes

Exercice.

Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.

1) Soit $e \in E$ et soit $m \geqslant 1$ tels que $u^m(e) = 0$, $u^{m-1}(e) \neq 0$. Montrer que les vecteurs $e, u(e), ..., u^{m-1}(e)$ sont $K-$linéairement indépendants.

2) En déduire que $u^n = 0$.

3) Déterminer la matrice de u dans la base $(u^{m-1}(e), u^{m-2}(e), ..., u(e), e)$.

4) Soient $v_1, ..., v_r \in E$ tels que

$$(v_1, ..., u^{m_1-1}(v_1), v_2, ..., u^{m_2-1}(v_2), ..., v_r, ..., u^{m_r-1}(v_r))$$

est une base de $\operatorname{im} u$ et tels que :

$$u^{m_1}(v_1) = ... = u^{m_r}(v_r) = 0$$

pour certains entiers $m_1, ..., m_r \geqslant 1$.

On complète $(u^{m_1-1}(v_1), ..., u^{m_r-1}(v_r))$ en une base

$$(x_1, ..., x_k, u^{m_1-1}(v_1), ..., u^{m_r-1}(v_r))$$

de $\ker u$.

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, soit $w_i \in E$ tel que $u(w_i) = v_i$.

Montrer que

$$(x_1, ..., x_k, u^{m_1}(w_1), ..., w_1, ..., u^{m_r}(w_r), ..., w_r)$$

est une base de E.

5) En déduire l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de E où la matrice de u est de la forme

$$[u]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_r \end{array}\right)$$

où

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r,\ J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$$

pour certains entiers $n_1, ..., n_r$. Vérifier de plus que

$$n_1 + ... + n_r = n$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1},\ N_k = \operatorname{rg} u^{k+1} - 2\operatorname{rg} u^k + \operatorname{rg} u^{k-1}$$

est le nombre de blocs J_i de taille $n_i = k$.