Fiche de TD 7
Réduction des endomorphismes *(suite)*

Exercice 1 Théorème de Cayley-Hamilton : une autre démonstration

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\chi_A(X) = c_n X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_0 \in \mathbb{C}[X]$ son polynôme caractéristique.

a) Montrer qu'il existe des matrices $B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$(B_0 + XB_1 + \ldots + X^{n-1}B_{n-1})(XI_n - A) = \chi_A(X)I_n \ .$$

b) En déduire des relations entre les matrices B_i et les coefficients c_k du polynôme caractéristique.

c) En déduire $c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_0 I_n = 0$.

Exercice 2 Calcul d'exponentielles Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Soient $x_1, \ldots, x_s$ des nombres complexes distincts et $n_1, \ldots, n_s$ des entiers tels que $n_1 + \ldots + n_s = n$. Montrer que l'application linéaire

$$\mathbb{C}[X]_{\leqslant n} \to \mathbb{C}^n,\ P \mapsto (P^{(j)}(x_i)\ :\ 1 \leqslant i \leqslant s,\ 0 \leqslant j \leqslant n_i - 1)$$

est un isomorphisme.

b) Calculer A^n pour tout n dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

c) De même calculer e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Lemme des noyaux

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$.

a) Si P, Q sont premiers entre eux, montrer que

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u) \ .$$

b) Montrer que si $D = pgcd(P, Q)$, alors $\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \ker D(u)$.

Exercice 4 Décomposition de Dunford-Jordan et surjectivité de exp

a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple (D, N) où D est diagonalisable, N nilpotente, $DN = ND$ et $M = D + N$.

Indication. Pour l'existence, si $\chi_M(X) = (X-\lambda_1)^{a_1}...(X-\lambda_s)^{a_s}$ pour certains λ_i distincts et certains entiers $a_i \geqslant 1$, soit $P(X)$ un polynôme tel que $\forall i,\ P(X) = \lambda_i \bmod (X - \lambda_i)^{a_i}$ et poser $D = P(M)$.

b) Montrer que si M est inversible alors il existe D, U tels que $DU = UD$, D diagonalisable, U unipotente † et $M = DU$.

c) En déduire que $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Indication. Si N est nilpotente, vérifier que

$$\exp\left(N + \frac{N^2}{2} + ... + \frac{N^{n-1}}{n-1}\right) = (I_n - N)^{-1} \ .$$

d) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas une exponentielle de matrice réelle *bien que de déterminant* > 0. En revanche, trouver une matrice réelle M telle que $\exp M = -I_2$.

†. *c-à-d* $U - I_n$ nilpotente.