Fiche de TD 6
Réduction des endomorphismes

Exercice 1 a) Diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

b) Diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{F}_3$?

Exercice 2 a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda = a + ib$ est une valeur propre de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

b) Diagonaliser sur $\mathbb{C}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

c) Calculer $\exp \left(\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. On pose $E_{\mathbb{C}} := E \times E$ et :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E_{\mathbb{C}}, \alpha + i\beta \cdot (x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y).$$

a) Montrer que $E_{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et que $\dim_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} E$. Si E, F sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, si $f : E \rightarrow F$ est $\mathbb{R}$ -linéaire, alors on pose $f_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow F_{\mathbb{C}}, (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$. Montrer que $f_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire.

Exercice 4 Si $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ on note $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

- Montrer que $P(C_P) = 0$. *Indication.* Vérifier d'abord que $P(C_P)e_1 = 0$ où $e_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0)$.
- Montrer que $\chi_{C_P}(X) = P(X)$.
- Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si $F \leq E$ est un sous-espace stable de u , alors $\chi_{u|_F} | \chi_u$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- En déduire que $\chi_u(u) = 0$ dans $\mathcal{L}(E)$.

- Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 5 Soit $U_n(X)$ le polynôme à coefficients rationnels tel que

$$\sin(nx) = U_n(\cos x) \sin x .$$

- Calculer U_1, U_2 et montrer la formule de récurrence

$$U_{n+1} + U_{n-1} = 2XU_n .$$

Quel est le degré de U_n ?

- Si $n \geq 1$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note $T_n(a, b, c)$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\chi_{T_n(a,b,c)}(X) = \sqrt{bc}^n U_{n+1}\left(\frac{X-a}{2\sqrt{bc}}\right)$ si $bc > 0$. *Indication.* Trouver une relation de récurrence pour les polynômes caractéristiques ...

- Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication. Chercher les vecteurs propres de la forme ${}^t(\sin t, \dots, \sin nt)$.