

Fiche de TD 5

Représentations matricielles des applications linéaires

Exercice 1 Soit $f : E' \rightarrow E$ linéaire. Si e est une base de E et e' une base de E' , on note

$$[f]_{e,e'}$$

la matrice de f dans les bases e', e *c-à-d* : si $A = [f]_{e,e'}$, alors

$$\forall j, f(e'_j) = \sum_i A_{ij} e_i .$$

Si $E = E'$ et $e = e'$, on notera simplement $[f]_e = [f]_{e,e}$.

- Montrer que $[f]_{e,e'}[g]_{e',e''} = [f \circ g]_{e,e''}$ pour peu que cela ait un sens.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer $[f]_e$ où f est la multiplication complexe par $a + ib$ et e est la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ (vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).
- Si e, e' sont les bases d'un même espace vectoriel E , on note $P_{e,e'} = [\text{Id}]_{e,e'}$ c'est la matrice de passage de la base e dans la base e' . Vérifier que $P_{e,e'}^{-1} = P_{e',e}$.
montrer que si $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n$, alors $X = PX'$ où $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, $X' = {}^t(x'_1, \dots, x'_n)$, $P = P_{e,e'}$.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base (e_1, e_2, e_3) . Soit $f : E \rightarrow E$ l'application linéaire telle que

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, f(e_2) = e_2 + e_3, f(e_3) = e_3 .$$

- Donner la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) .
- Montrer que f est inversible et donner la matrice de f^{-1} dans la base (e_1, e_2, e_3) .
- Donner la matrice de f dans la base $(e_3, e_2, e_1)^\dagger$.

Exercice 3 Soit r la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

- Donner la matrice de r dans la base canonique.
- Donner la matrice de r dans la base $e'_1 = 2e_2, e'_2 = e_1 - e_2$.

$\dagger$. l'ordre a changé !

c) Écrire la formule de changement de bases dans ce cas.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$.

a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Donner une base de $\ker f$ et une de $\operatorname{im} f$.

c) Donner la matrice de f dans la base $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (0, 1, -1)$.

Exercice 5 Soit E l'espace des polynômes réels de degré $\leq n$.

a) Déterminer la matrice de la dérivation dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ et la matrice dans la base $(1, X, \dots, \frac{X^n}{n!})$.

b) Écrire la relation entre ces deux matrices obtenue grâce à la formule de changement de bases.

Exercice 6 Si $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. On note

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) .$$

a) Montrer que $V(x_0, \dots, x_n)$ est inversible et que c'est la matrice de passage de la base $(1, X, \dots, X^n)$ dans la base $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ où pour tout $0 \leq i \leq n$,

$$P_i = \frac{1}{P'(x_i)} \frac{P}{X - x_i} .$$

b) Montrer que $V(1, \omega, \dots, \omega^n)^{-1} = \frac{1}{n+1} V(1, \omega^{-1}, \dots, \omega^{-n})$ si $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$.

Exercice 7 Soit τ la racine > 0 de $X^2 + X - 1$. On pose :

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -\tau^{-1} & 1 \\ \tau^{-1} & 1 & \tau \\ -1 & \tau & \tau^{-1} \end{pmatrix} .$$

a) Montrer que R est une rotation.

b) Déterminer l'axe de cette rotation et son angle. En déduire que la matrice R est d'ordre 5 dans le groupe $\operatorname{GL}_3(\mathbb{R})$.