

Fiche de TD 4**Familles libres, familles génératrices, bases** (*exercices supplémentaires*)**Exercice 1** Montrer que les nombres

$$\ln p, p \text{ premier},$$

sont $\mathbb{Q}$ –linéairement indépendants dans $\mathbb{R}$.**Exercice 2** Montrer que les nombres $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ sont $\mathbb{Q}$ –linéairement indépendants. *Indication. Si n est un entier sans facteur carré, alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.***Exercice 3** Dans $\mathbb{Q}^4$ soient les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (1, 1, 1, 3), v_3 = (2, 1, 1, 1), v_4 = (-1, 0, -1, 2), v_5 = (2, 3, 0, 1).$$

Soient $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, $G = \text{Vect}\{v_4, v_5\}$. Déterminer

$$\dim F, \dim G, \dim F \cap G, \dim F + G.$$

Exercice 4 Calcul d'une puissance de matricea) Soient $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$, $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}_{>0}$. Déterminer le noyau de l'application linéaire :

$$\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}^{n_1 + \dots + n_N}, P(X) \mapsto (P^{(i)}(z_j))_{1 \leq j \leq N, 0 \leq i \leq n_j - 1}.$$

En déduire que la restriction à $\mathbb{C}[X]_{< n_1 + \dots + n_N}$ est injective.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\chi_A(X) = (X - 1)(X - 2)^2$.

c) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]_{\leq 2}$ tel que $P(1) = 1$, $P(2) = 2^m$, $P'(2) = m2^{m-1}$.d) En déduire A^m . Justifier que $A^m = P(A)$.e) Déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]_{\leq 2}$ tel que $Q(1) = 1$, $Q(2) = \frac{1}{2}$, $Q'(2) = -\frac{1}{2^2}$. A-t-on $Q(A) = A^{-1}$?**Exercice 5 Calculs de déterminants**a) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, deux à deux distincts. Soient $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.

Décomposer en éléments simples la fraction :

$$R(X) = \frac{(b_1 - X) \dots (b_{n-1} - X)}{(X + a_1) \dots (X + a_n)} = \frac{\lambda_1}{X + a_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{X + a_n}.$$

- b) En déduire, si $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_i + b_j \neq 0$, le déterminant de la matrice

$$\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

indication. Noter $L_1, \dots, L_n$ les lignes de la matrices, alors

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \sum_i \lambda_i L_i \end{vmatrix}.$$

- c) En s'inspirant de la méthode ci-dessus calculer, pour tous $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, le déterminant de la matrice de Vandermonde :

$$V(x_0, \dots, x_n) = \left(x_i^j \right)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) .$$

Exercice 6 Inverse des matrices de Vandermonde

- a) Si $x_0, \dots, x_n$ sont des réels deux à deux distincts, exprimer les coefficients de la matrice

$$V(x_0, \dots, x_n)^{-1} = \left(x_i^j \right)_{0 \leq i, j \leq n}^{-1}$$

avec les coefficients des polynômes de Lagrange :

$$P_j(X) = \frac{\prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} (X - x_k)}{\prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} (x_j - x_k)} .$$

- b) Calculer par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}^{-1} .$$

- c) Montrer que si $\omega \in \mathbb{C}^*$ est d'ordre n , alors $V(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})^{-1} = \frac{1}{n} V(1, \omega^{-1}, \dots, \omega^{-(n-1)})$.

En déduire que si on note

$$\mathcal{F}_n : \mathbb{C}[X]_{<n} \rightarrow \mathbb{C}[X]_{<n}, P(X) \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_n : \mathbb{C}[X]_{<n} \rightarrow \mathbb{C}[X]_{<n}, P(X) \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k}) X^k,$$

alors

$$\forall P \in \mathbb{C}[X]_{<n}, \tilde{\mathcal{F}}_n(\mathcal{F}_n(P)) = nP.$$