L3 – algèbre linéaire et géométrie vectorielle
Examen partiel
mercredi 26 mars 2025
11H30 - 13H
Ni les documents, ni les téléphones ni les calculatrices ne sont autorisés.

Correction

Exercice 1 Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

a) Déterminer une base de $\ker C$ et une base de $\operatorname{im} C$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker C \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - t & = & 0 \\ -x + 2y - z & = & 0 \\ -y + 2z - t & = & 0 \\ -x - z + 2t & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z & = & 0 \ (L2) \\ 3y - 2z - t & = & 0 \ (L1 + 2L2) \\ -y + 2z - t & = & 0 \\ -2y + 2t & = & 0 \ (L4 - L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = t$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker C$.

D'après le théorème de rang, $\dim \operatorname{im} C = 4 - \dim \ker C = 3$. Il suffit donc de donner trois vecteurs indépendants de $\operatorname{im} C$ pour avoir une base.

Or, les trois premières colonnes de C :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont dans $\operatorname{im} C$ et sont indépendantes car

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

(on prend les trois premières lignes des trois premières colonnes).

Donc les trois vecteurs

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\operatorname{im} C$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^4 = \ker C \oplus \operatorname{im} C$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \ker C$. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \operatorname{im} C \Leftrightarrow \exists\, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2\lambda - \mu \\ x &= -\lambda + 2\mu - \nu \\ x &= -\mu + 2\nu \\ x &= -\lambda - \nu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda = \mu = \nu = 0.$$

Donc $\ker C \cap \operatorname{im} C = 0$. Donc $\ker C + \operatorname{im} C = \ker C \oplus \operatorname{im} C$. Comme $\dim(\ker C \oplus \operatorname{im} C) = \dim \ker C + \dim \operatorname{im} C = 1 + 3 = 4$, on a bien

$$\ker C \oplus \operatorname{im} C = \mathbb{R}^4.$$

Exercice 2 Pour chacune des listes de fonctions suivantes, dire si elle est libre ou liée dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. *Justifier chaque réponse.*

a) $(x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2, (x+4)^2$;
Les 4 fonctions $(x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2, (x+4)^2$ sont dans le sous-espace $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ qui est de dimension 3 donc sont liées.

b) $|x+1|, |x+2|, |x+3|, |x+4|$.

Soient $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ t_1|x+1| + t_2|x+2| + t_3|x+3| + t_4|x+4| = 0$$

$$\Rightarrow t_1|x+1| = -t_2|x+2| - t_3|x+3| - t_4|x+4| \ (*).$$

Or, la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et n'est pas dérivable en $x = 0$. Donc dans l'égalité $(*)$, la fonction de droite est dérivable en $x = -1$. La fonction de gauche n'est pas dérivable en $x = -1$ si $t_1 \neq 0$. Donc $t_1 = 0$.

De même

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ t_2|x+2| = -t_1|x+1| - t_3|x+3| - t_4|x+4|$$

$$\Rightarrow t_2 = 0.$$

De même, $t_3 = t_4 = 0$. Donc les fonctions

$$|x+1|, |x+2|, |x+3|, |x+4|$$

forment une famille libre sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit l'application

$$\varphi : \mathbb{C}[X]_{\leqslant 3} \to \mathbb{C}^4,\ P(X) \mapsto (P(0), P'(0), P(1), P'(1)).$$

a) Montrer que φ est linéaire.

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]_{\leqslant 3}$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(P+Q) &= ((P+Q)(0), (P+Q)'(0), (P+Q)(1), (P+Q)'(1)) \\
&= (P(0)+Q(0), P'(0)+Q'(0), P(1)+Q(1), P'(1), Q'(1)) \\
&= (P(0), P'(0, P(1), P'(1)) + (Q(0), Q'(0), Q(1), Q'(1)) \\
&= \varphi(P) + \varphi(Q).
\end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P) &= (\lambda P(0), (\lambda P)'(0), \lambda P(1), (\lambda P)'(1)) \\
&= (\lambda P(0), \lambda P'(0), \lambda P(1), \lambda P'(1)) \\
&= \lambda (P(0), P'(0), P(1), P'(1)) \\
&\lambda \varphi(P).
\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

b) Montrer que φ est bijective.

Soit $P \in \ker \varphi$. Alors $\varphi(P) = (0,0,0,0)$

$$\Rightarrow P(0) = P'(0) = P(1) = P'(1) = 0$$

$$\Rightarrow X^2 | P,\ (X-1)^2 | P$$
$$\Rightarrow X^2(X-1)^2 | P$$
$$\Rightarrow P = 0$$

Car $\deg P \leqslant 3 < 4 = \deg X^2(X-1)^2$.

c) Déterminer $P_0 = \varphi^{-1}(1,0,0,0), P_1 = \varphi^{-1}(0,1,0,0), P_2 = \varphi^{-1}(0,0,1,0), P_3 = \varphi^{-1}(0,0,0,1)$.

On a

$$P_0 = \varphi^{-1}(1,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow P_0(0) = 1, P_0'(0) = 0, P_0(1) = P_0'(1) = 0$$
$$\Rightarrow X^2 | P_0 - 1 \Rightarrow P_0 - 1 = X^2(aX+b),\ a, b \in \mathbb{C}$$

car $\deg P_0 \leqslant 3$

$$\Rightarrow P_0 = aX^3 + bX^2 + 1.$$

Donc

$$P_0(1) = P_0'(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1 &= 0 \\ 3a+2b+1 &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= -1 \\ 3a+2b &= -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a = -2,\ b = -4.$$

Donc $P_0 = -2X^3 - 4X^2 + 1$.

De même,

$$\varphi(P_1) = (0,1,0,0) \Leftrightarrow P_1(0) = 0, P_1'(0) = 1, P_1(1) = P_1'(1) = 0$$

$$\Rightarrow (X-1)^2 | P_1$$

$$\Rightarrow P_1 = (X-1)^2(aX+b),\ a, b \in \mathbb{C}$$

car $\deg P_1 \leqslant 3$

$$\Rightarrow P_1(0) = (-1)b = -b,\ P_1'(0) = 2(-1)b + (-1)^2 a = -2b + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b & = & 0 \\ -2b + a & = & 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = 0, a = 1$$

$$\Rightarrow P_1 = (X-1)^2.$$

De même,

$$\varphi(P_2) = (0,0,1,0) \Leftrightarrow P_2(0) = 0, P_2'(0) = 0, P_2(1) = 1, P_2'(1) = 0$$

$$\Rightarrow X^2 | P_2$$

$$\Rightarrow P_2 = X^2(aX + b),\ a, b \in \mathbb{C}$$

car $\deg P_2 \leqslant 3$

$$\Rightarrow P_2(1) = a + b,\ P_2'(1) = 2(a+b) + 1^2 a = 3a + 2b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b & = & 1 \\ 3a + 2b & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b & = & 1 \\ 3a + 2b & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a = -2, b = 3$$

$$\Rightarrow P_2 = X^2(-2X + 3) = -2X^3 + 3X^2.$$

De même,

$$\varphi(P_3) = (0,0,0,1) \Leftrightarrow P_3(0) = 0, P_3'(0) = 0, P_3(1) = 0, P_3'(1) = 1$$

$$\Rightarrow X^2 | P_3$$

$$\Rightarrow P_3 = X^2(aX + b),\ a, b \in \mathbb{C}$$

car $\deg P_3 \leqslant 3$

$$\Rightarrow P_3(1) = a + b,\ P_3'(1) = 2(a+b) + 1^2 a = 3a + 2b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b & = & 0 \\ 3a+2b & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b & = & 0 \\ 3a+2b & = & 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a = 1, b = -1$$

$$\Rightarrow P_2 = X^2(X-1) = X^3 - X.$$

d) Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{C}[X]_{\leqslant 3}$.

Comme φ est un isomorphisme linéaire, (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{C}[X]_{\leqslant 3}$ comme image de la base canonique de $\mathbb{C}^4$ par φ^{-1}.

e) Exprimer le polynôme $(X+1)^3$ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3).

Soient $t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$ tels que :

$$t_0P_0 + t_1P_1 + t_2P_2 + t_3P_3 = (X+1)^3$$

Or, d'une part

$$\varphi(t_0P_0 + t_1P_1 + t_2P_2 + t_3P_3) = t_0\varphi(P_0) + t_1\varphi(P_1) + t_2\varphi(P_2) + t_3\varphi(P_3)$$

$$= (t_0, t_1, t_2, t_3).$$

D'autre part,

$$\varphi((X+1)^3) = ((0+1)^3, 3.(0+1)^2, (1+1)^3, 3.(1+1)^2)$$

$$= (1, 3, 8, 12).$$

Donc $(X+1)^3 = P_0 + 3P_1 + 8P_2 + 12P_3$.

Exercice 4 (Bonus) Donner un exemple de trois sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels V_1, V_2, V_3 de $\mathbb{R}^4$ tels que : $(V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3) \subsetneq (V_1 + V_2) \cap V_3$.

Par exemple $V_1 = \mathbb{R}^2 \times 0 \times 0$, $V_2 = 0 \times 0 \times \mathbb{R}^2$, $V_3 = \{(x, x, x, x) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$.
Alors $V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = 0 \Rightarrow (V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3) = 0$.
D'un autre côté, $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4 \Rightarrow (V_1 + V_2) \cap V_3 = V_3 \neq 0$.