
Contrôle final (Session II) - Mercredi 05/07/2023

durée : 1h30

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction.

Barème indicatif : $5+5+4+6=20$.

Préambule : On note $\mathbb{R}[x]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour deux entiers $m, n \geq 1$ et un corps k , on note $\mathcal{M}_{m,n}(k)$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ (c.-à.-d., de m lignes et n colonnes) à coefficients dans k . On note $\mathcal{M}_n(k)$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans k .

Exercice 1 (Questions de cours). Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire entre deux k -espaces vectoriels V et W .

1. Donner la définition du *noyau* de T , noté $\ker(T)$.
2. Montrer que $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .
3. On suppose que $\dim(V) = \dim(W) = n < +\infty$. Montrer que si T est injective et $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une base de V , alors $\{T(x_1), \dots, T(x_n)\}$ est une base de W .
4. En déduire que si T est injective alors T est surjective.
5. Donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ qui est injectif mais pas surjectif.

Exercice 2. Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le but de cet exercice est de montrer que $BA = I_2$. On note $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice B . On pose $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la composition $f \circ g$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique $\mathcal{C}$.
3. Montrer que $\{g(e_2), g(e_3)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

4. Montrer que la composition $g \circ f$ est l'identité de $\mathbb{R}^2$.
5. En déduire que $BA = I_2$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de montrer que si deux matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient A, B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$. On pose $S = \operatorname{Re}(P)$ (la partie réelle de P) et $T = \operatorname{Im}(P)$ (la partie imaginaire de P) en sorte que $P = S + iT$.

1. Montrer que $SA = BS$ et que $TA = BT$.
2. On pose $R(x) = \det(S + xT)$. Montrer que $R(x)$ est un polynôme non nul.
3. En déduire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $S + x_0T$ est inversible.
4. En déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = QAQ^{-1}$.

Exercice 4. Soit T un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel V de dimension $n \geq 2$. On suppose que les seuls sous-espaces de V stables par T sont V et $\{0_V\}$.

1. T possède-t-il des valeurs propres dans $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
2. En déduire que n est pair.
3. Soit $x \in V \setminus \{0_V\}$. Montrer que la famille $\mathcal{B}(x) = (x, T(x), T^2(x), \dots, T^{n-1}(x))$ est libre.
4. En déduire qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$T^n(x) = a_0x + a_1T(x) + \dots + a_{n-1}T^{n-1}(x).$$

5. Déterminer la matrice de T dans la base $\mathcal{B}(x)$.
6. Donner un exemple d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que les seuls sous-espaces stables par f sont $\{(0, 0)\}$ et $\mathbb{R}^2$.

Bonus (2 pts) : Montrer que pour tout endomorphisme T d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel V non nul, il existe un sous-espace de V stable par T de dimension 1 ou 2.