Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024
Algèbre linéaire et géométrie vectorielle, L3 Mathématiques pour l'enseignement.

Contrôle final (Session II) - Vendredi 21/06/2024
durée : 1h30
L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction.

Exercice 1 (Question de cours)**.**
Définir le noyau et l'image d'une application linéaire $f : E \to F$ entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F et énoncer le théorème du rang pour l'application f.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel réel et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$f_1 = e_2 \qquad f_2 = e_2 + e_3 \qquad f_3 = e_3 + e_1.$$

1. Montrer que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs f_1, f_2, f_3 dans la base $\mathcal{F}$ et dans la base $\mathcal{E}$.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs e_1, e_2, e_3 dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 3. Soit $V = \mathbb{R}[x]_2$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit l'application linéaire $T : V \to V$ par $T(p(x)) = p(1-x) - x^2 p(0)$.

1. Vérifier que T est une application linéaire de V dans V.
2. Écrire la matrice de T relative à la base $(1, x, x^2)$ de V.
3. Déterminer le noyau et l'image de T. Trouver l'équation que doivent vérifier a, b, c pour que le polynôme $q(x) = ax^2 + bx + c$ soit dans l'image de T.

Exercice 4. Déterminer pour quelles valeurs des réels a, b et c la matrice A suivante est diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $f : E \to E$ une application linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $f^2(x) - f(x) = 2x$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Montrer que f est diagonalisable et que $E = \mathrm{Ker}(f + Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f + Id) = \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.