Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023

Algèbre linéaire et géométrie vectorielle, L3 Mathématiques pour l'enseignement.

Contrôle final - Mercredi 24/05/2023

durée : 2 h

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction.

Barème indicatif : 4+4+4+4+4=20.

Préambule : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de polynômes de degré au plus n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Il sera admit que $\mathrm{d}im(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.

Exercice 1 (Question de Cours)**.**

1. Donner la définition du *rang* d'une application linéaire $T : V \to W$ entre deux k-espaces vectoriels V et W de dimensions finies et énoncer le théorème du rang.
2. Soient F et G deux sous-espaces d'un même espace vectoriel E. Compléter la phrase suivante : On dit que F et G sont *supplémentaires* dans V si ...
3. Montrer sans calcul que la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
n'est pas diagonalisable.
4. Montrer sans calcul que la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable.

Exercice 2. Soit V un k-espace vectoriel ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $p : V \to V$ un endomorphisme de V vérifiant $p \circ p = p$. Montrer que l'on a $V = \mathrm{K}er(p) \oplus \mathrm{I}m(p)$ et $\mathrm{I}m(p) = \mathrm{K}er(\mathrm{Id}_V - p)$.

Exercice 3. Soit $p(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 3$.

1. Déterminer la multiplicité de la racine -1 de $p(x)$.
2. En déduire une décomposition de $p(x)$ en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4\}$ est une base de $\mathbb{R}_4[x]$.
4. Déterminer les coordonnées de $p(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4. On considère l'application $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par $T(p(x)) = p(x+1)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer la matrice de T dans la base canonique $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de T ainsi que les valeurs propres de T.
4. En déduire que T n'est pas diagonalisable et déterminer le polynôme minimal de T.
5. Déterminer tous les vecteurs propres de T.

Exercice 5. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a que λ est une valeur propre de $f \circ g$ si et seulement si λ est une valeur propre de $g \circ f$.
2. En déduire que si V est de dimension finie, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres. **Indication :** Montrer que si $dim(V) < +\infty$ et 0 est une valeur propre de $f \circ g$, alors $g \circ f$ n'est pas inversible.
3. Soit $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On considère les endomorphismes F et G de V définis par $F(\varphi)(x) = \varphi'(x)$ et $G(\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt$. Montrer que 0 est une valeur propre de $G \circ F$. Déterminer les valeurs propres de $F \circ G$.
4. Conclure.