L3 – algèbre linéaire et géométrie vectorielle
Examen partiel
mercredi 26 mars 2025
11H30 - 13H
Ni les documents, ni les téléphones ni les calculatrices ne sont autorisés.

Exercice 1 Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

a) Déterminer une base de $\ker C$ et une base de $\operatorname{im} C$. 2,5
b) Montrer que $\mathbb{R}^4 = \ker C \oplus \operatorname{im} C$. 2,5

Exercice 2 Pour chacune des listes de fonctions suivantes, dire si elle est libre ou liée dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. *Justifier chaque réponse.*

a) $(x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2, (x+4)^2$; 2
b) $|x+1|, |x+2|, |x+3|, |x+4|$. 3

Exercice 3 Soit l'application

$$\varphi : \mathbb{C}[X]_{\leqslant 3} \to \mathbb{C}^4,\ P(X) \mapsto (P(0), P'(0), P(1), P'(1)).$$

a) Montrer que φ est linéaire. 1
b) Montrer que φ est bijective. 2
c) Déterminer $P_0 = \varphi^{-1}(1,0,0,0), P_1 = \varphi^{-1}(0,1,0,0), P_2 = \varphi^{-1}(0,0,1,0), P_3 = \varphi^{-1}(0,0,0,1)$. 6
d) Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{C}[X]_{\leqslant 3}$. 1
e) Exprimer le polynôme $(X+1)^3$ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3). 2

Exercice 4 (Bonus) Donner un exemple de trois sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels V_1, V_2, V_3 de $\mathbb{R}^4$ tels que : $(V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3) \subsetneq (V_1 + V_2) \cap V_3$. 3