L3 – algèbre linéaire et géométrie vectorielle**Examen partiel**

mercredi 26 mars 2025

11H30 - 13H

Ni les documents, ni les téléphones ni les calculatrices ne sont autorisés.

Exercice 1 Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

- Déterminer une base de $\ker C$ et une base de $\operatorname{im} C$.
- Montrer que $\mathbb{R}^4 = \ker C \oplus \operatorname{im} C$.

Exercice 2 Pour chacune des listes de fonctions suivantes, dire si elle est libre ou liée dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. *Justifier chaque réponse.*

- $(x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2, (x+4)^2$;
- $|x+1|, |x+2|, |x+3|, |x+4|$.

Exercice 3 Soit l'application

$$\varphi : \mathbb{C}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{C}^4, P(X) \mapsto (P(0), P'(0), P(1), P'(1)).$$

- Montrer que φ est linéaire.
- Montrer que φ est bijective.
- Déterminer $P_0 = \varphi^{-1}(1, 0, 0, 0)$, $P_1 = \varphi^{-1}(0, 1, 0, 0)$, $P_2 = \varphi^{-1}(0, 0, 1, 0)$, $P_3 = \varphi^{-1}(0, 0, 0, 1)$.
- Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{C}[X]_{\leq 3}$.
- Exprimer le polynôme $(X+1)^3$ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) .

Exercice 4 (Bonus) Donner un exemple de trois sous- $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels V_1, V_2, V_3 de $\mathbb{R}^4$ tels que : $(V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3) \subsetneq (V_1 + V_2) \cap V_3$.