L3 – algèbre linéaire et géométrie vectorielle
Examen partiel
mercredi 13 mars 2024
10H - 11H30
Ni les documents, ni les téléphones ni les calculatrices ne sont autorisés.

Corrigé

Exercice 1 Soient les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = (0,1,2,3),\ v_2 = (1,2,3,4),\ v_3 = (2,3,4,5),$$

$$v_4 = (0,1,0,1),\ v_5 = (1,0,1,0)\ .$$

On pose $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, $G = \mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$.

a) Déterminer une base de F et une base de G.
Ona : $v_3 - v_2 = v_2 - v_1$ donc $v_3 = 2v_2 - v_1 \Rightarrow F = \mathrm{Vect} v_1, v_2$. Or v_1, v_2 ne sont pas colinéaires donc (v_1, v_2) est une base de F. Comme v_4, v_5 ne sont pas colinéaires, (v_4, v_5) est une base de G.

b) Donner une base de $F \cap G$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$xv_1 + yv_2 \in G \Leftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ xv_1 + yv_2 = av_4 + bv_5$$

$$\Leftrightarrow \exists\, a, b, \begin{cases} y &= b \\ x + 2y &= a \\ 2x + 3y &= b \\ 3x + 4y &= a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3x + 4y \\ y = 2x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0\ .$$

Donc $F \cap G = \{xv_1 - xv_2\ :\ x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(v_1 - v_2)$. Donc le vecteur $v_1 - v_2 = -(1,1,1,1)$ est une base de $F \cap G$.

c) En déduire $\dim(F+G)$ et donner une base de $F+G$. Ona : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$. Or $\dim F = \dim G = 2$, $\dim F \cap G = 1$. Donc $\dim F + G = 3$. Comme $v_1, v_2, v_4 \in F+G$, il suffit de vérifier que v_1, v_2, v_4 sont $\mathbb{R}-$linéairement indépendants pour trouver une base.

Or si $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$xv_1 + yv_2 + zv_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \\ 2x + 3y & = & 0 \\ 3x + 4y + z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = & 0 \\ x + z & = & 0 \\ 2x & = & 0 \\ 3x + z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 \ .$$

Donc (v_1, v_2, v_4) est une base de $F+G$.

Exercice 2 Soit

$$N = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}) \ .$$

Soit $E = \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Soit $f_N : E \to E$, $x \mapsto Nx$.

Soient

$$u_1 = {}^t(-1, 0, 1, 2),\ u_2 = {}^t(0, 1, 2, -1),\ u_3 = {}^t(1, 2, -1, 0),\ u_4 = {}^t(2, -1, 0, 1) \ .$$

a) Montrer que $b = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E.

Il suffit de montrer que

$$D := \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Or,

$$D \overset{\substack{L_3+L_1 \\ L_4+2L_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Sarrus}}{=} -(0-4-4-0-4-20) = 32 \neq 0.$$

Donc $b = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E.

b) Quelle est la matrice de f_N dans la base b ?

On trouve $f_N(u_1) = 0$, $f_N(u_2) = u_1$, $f_N(u_3) = u_2$, $f_N(u_4) = u_3$ donc la matrice de f_N dans la base b est la matrice

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

c) En déduire N^4.

La formule de changement de bases donne :

$$N = PN_1P^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique dans la base b. C-à-d, $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $N^4 = (PN_1P^{-1})^4 = PN_1^4P^{-1} = 0$.

Exercice 3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application linéaire

$$\varphi_n : \mathbb{R}[X]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant n}\,,\ P(X) \mapsto P(X+1) + P(X)$$

est un isomorphisme.

Soit $0 \neq P = a_d X^d + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_d \neq 0$. Alors

$$P(X+1) + P(X) = 2a_d X^d + \text{ termes de degrés } < d$$

donc $\deg(P(X+1)+P(X)) = \deg P$ et en particulier $P(X+1)+P(X) \neq 0$. Donc $\ker \varphi_n = 0$ pour tout n. Donc φ_n est injectif. Comme $\dim \mathbb{R}[X]_{\leqslant n} = n+1 < \infty$, le morphisme injectif φ_n est un isomorphisme.

b) L'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1)+P(X)$ est-elle aussi un isomorphisme ?

L'application φ est injective car $\forall\, P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P) = 0 \Rightarrow P = 0$. Soit $0 \neq Q \in \mathbb{R}[X]$. Soit $n = \deg Q \in \mathbb{N}$, alors $Q \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant n} \Rightarrow \exists\, P \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$, $\varphi_n(P) = \varphi(P) = Q$. Donc φ est aussi surjectif. Donc $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ est un isomrphisme.

c) Trouver l'unique polynôme $e(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant 4}$ tel que $\varphi_4(e(X)) = 2X^4$.

On cherche P sous la forme $P = a_4X^4 + a_3x^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ où $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 4$, $a_i \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\varphi_4(P) = 2X^4 \Leftrightarrow a_4(X+1)^4+a_3(X+1)^3+a_2(X+1)^2+a_1(X+1)+a_0+a_4X^4+a_3x^3+a_2X^2+a_1X+$$

$$\Leftrightarrow X^4(2a_4)+X^3(4a_4+2a_3)+X^2(6a_4+3a_3+2a_2)+X(4a_4+3a_3+2a_2+2a_1)+(a_4+a_3+a_2+a_1+2a_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_4 & = 2 \\ 4a_4 + 2a_3 & = 0 \\ 6a_4 + 3a_3 + 2a_2 & = 0 \\ 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + 2a_1 & = 0 \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + 2a_0 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_4 = 1,\ a_3 = -2,\ a_2 = 0,\ a_1 = 1,\ a_0 = 0$$

$$P = X^4 - 2X^3 + X\ .$$

Exercice 4 Pour chacune des listes de fonctions suivantes, dire si elle est libre ou liée dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. *Justifier chaque réponse.*

a) $\sin x, (\sin x)^2, (\sin x)^3$; Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ a\sin x + b\sin^2 x + c\sin^3 x = 0\ .$$

Alors $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(\sin x) = 0$ où $P = aX + bX^2 + cX^3$. Donc $P = 0$ car P a une infinité de racines : $\sin x$, $s \in \mathbb{R}$. Donc $a = b = c = 0$. Donc la famille $(\sin x, \sin^2 x, \sin^3 x)$ est libre.

b) $\sin x, \sin(2x), \sin(3x)$; Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x = 0\ .$$

Par exemple pour $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$, on trouve le système :

$$(S)\ \begin{cases} a - c & = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b & = 0 \\ \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + c & = 0 \end{cases}$$

or, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{4} \neq 0$. Donc $(S) \Leftrightarrow a = b = c = 0$ et la famille $(\sin x, \sin 2x, \sin 3x)$ est libre.

c) $\sin x, \sin(\sin x), \sin(\sin(\sin x))$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ a\sin x + b\sin\sin x + c\sin\sin\sin x = 0\ .$$

Utilisons les développements limités à l'ordre 5 en 0.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\sin\sin x = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{6} + \frac{(\sin x)^5}{120} + o((\sin x)^5)$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})^3}{6} + \frac{(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})^5}{120} + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$$

$$\sin\sin\sin x = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3} + \frac{(\sin x)^5}{10} + o(\sin x)^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})^3}{6} + \frac{(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})^5}{10} + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + \frac{11x^5}{40} + o(x^5)\ .$$

Par unicité des développements limités à l'ordre 5 en 0, on obtient :

$$a(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) + b(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}) + c(x - \frac{x^3}{2} + \frac{11x^5}{40}) = 0$$

comme polynôme en la variable x.

d'où le système

$$(*)\ \begin{cases} a+b+c & = & 0 \\ -\frac{1}{6}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c & = & 0 \\ \frac{1}{120}a + \frac{1}{10}b + \frac{11}{40}c & = & 0 \end{cases} .$$

Mais

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{120} & \frac{\sqrt{1}}{10} & \frac{11}{40} \end{vmatrix} = -\frac{11}{120} - \frac{1}{60} - \frac{1}{240} + \frac{1}{360} + \frac{1}{20} + \frac{1}{240}$$

$$= -\frac{1}{18} \neq 0\ .$$

Donc $(*) \Leftrightarrow a = b = c = 0$ et la famille $(\sin x, \sin\sin x, \sin\sin\sin x)$ est libre.