L3 – algèbre linéaire et géométrie vectorielle
Examen partiel
mercredi 13 mars 2024
10H - 11H30
Ni les documents, ni les téléphones ni les calculatrices ne sont autorisés.

Exercice 1 Soient les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = (0,1,2,3),\ v_2 = (1,2,3,4),\ v_3 = (2,3,4,5),$$

$$v_4 = (0,1,0,1),\ v_5 = (1,0,1,0)\ .$$

On pose $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, $G = \mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$.

a) Déterminer une base de F et une base de G.

b) Donner une base de $F \cap G$.

c) En déduire $\dim(F+G)$ et donner une base de $F+G$.

Exercice 2 Soit

$$N = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})\ .$$

Soit $E = \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
Soit $f_N : E \to E$, $x \mapsto Nx$.
Soient

$$u_1 = {}^t(-1,0,1,2),\ u_2 = {}^t(0,1,2,-1),\ u_3 = {}^t(1,2,-1,0),\ u_4 = {}^t(2,-1,0,1)\ .$$

a) Montrer que $b = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E.

b) Quelle est la matrice de f_N dans la base b ?

c) En déduire N^4.

Exercice 3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application linéaire

$$\varphi_n : \mathbb{R}[X]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant n}\,,\ P(X) \mapsto P(X+1) + P(X)$$

est un isomorphisme.

b) L'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1) + P(X)$ est-elle aussi un isomorphisme ?

c) Trouver l'unique polynôme $e(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant 4}$ tel que $\varphi_4(e(X)) = 2X^4$.

Exercice 4 Pour chacune des listes de fonctions suivantes, dire si elle est libre ou liée dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. *Justifier chaque réponse.*

a) $\sin x, (\sin x)^2, (\sin x)^3$;

b) $\sin x, \sin(2x), \sin(3x)$;

c) $\sin x, \sin(\sin x), \sin(\sin(\sin x))$.